



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

Requerente(s): **Prof. Mario Rodolfo Roldan Daquilema**

Título do Projeto: **Entropia e Comportamento Histórico de Difeomorfismos Não-Hiperbólicos**

Assunto: **Relatório Final de Projeto de Pesquisa.**



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201904892

1. Título:

Entropia e Comportamento Histórico de Difeomorfismos Não-Hiperbólicos

2. Resumo:

O objetivo do presente projeto de pesquisa contempla o estudo do conjunto com comportamento histórico para sistemas dinâmicos não necessariamente hiperbólicos, más especificamente consideraremos dinâmicas de tipo Blender (Bonatti-Diaz). É bem conhecido que em certos sistemas dinâmicos, como o sub-shift de tipo finito, a contribuição do conjunto de pontos irregulares (irrelevantes em Teoria Ergódica) resulta ser eficaz uma vez que estes conjuntos carregam entropia total. A contribuição dinâmica de tais conjuntos é considerado importante nesta área. Foi o trabalho de Takens que deu o pontapé inicial para seu estudo: Há classes robustas de sistemas dinâmicos diferenciáveis de tal maneira que o conjunto de estados iniciais que dão lugar a órbitas com comportamento histórico tenha medida de Lebesgue positiva? A pergunta natural elaborada é importante, pois em sistemas dinâmicos, é de interesse fundamental a classificação de sistemas cujas propriedades sejam preservadas sob pequenas modificações da dinâmica (isto é, estabilidade). Os avanços no estudo de comportamento histórico no caso hiperbólico, foi estabelecido parcialmente (quase perto do problema inicial de Takens) para certos sistemas que admitem extensão simbólica. Nosso trabalho considera dinâmicas que não admite extensão simbólica. A execução do projeto implica explorar novas formas de aproximação de dinâmicas (i.e. aproximação por entropia de conjuntos hiperbólicos).

Palavras-chave:

Entropia Topológica; Entropia Métrica; Teorema Ergódico;

3. Coordenador:

Nome: Mario Rodolfo Roldan Daquilema

Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM

Tipo: Professor

Regime de Trabalho: DE

Valor Mensal: Sem remuneração

Forma de Remuneração: Sem bolsa

Carga Horária Semanal: 10.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:

Valor Total: R\$ 0,00

Fundações:

Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Início: 30/04/2019

Início Efetivo: 30/04/2019

Duração: 24 Meses

Término: 30/04/2021

Aprovação: 01/05/2019

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA

Área do Conhecimento: MATEMATICA



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201904892

Subárea do conhecimento: GEOMETRIA E TOPOLOGIA

Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201904892

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Mario Rodolfo Roldan Daquilema 060.425.697-32	Professor Coordenador	30/04/2019 à 30/04/2021	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R\$ 0,00 / R\$ 0,00		10.00h	Sim	Aprovado

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Relatório Final em aprovação

Número: 201904892

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

11. Relatório Final:

Data efetiva de término: 30/04/2021

Tipo		Descrição
Produção bibliográfica	Apresentação de trabalho ou	Conferencia: "NÚMERO DE
Produção bibliográfica	Outra produção bibliográfica	Preprint submetido no arxiv
Orientações	Dissertação de mestrado	Supervisão de trabalho de Disertação no
Produção bibliográfica	Artigos em periódicos internacional	Publicação na revista Nonlinearity da

Receita total (inclui rendimento): R\$ 0,00

Despesa realizada: R\$ 0,00

Saldo: R\$ 0,00

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
07/04/2019 - 18:32h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Criou o projeto		
12/04/2019 - 17:15h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Prezados Senhores da Câmara de Extensão, segue o seguinte Projeto de Pesquisa para sua devida apreciação.
26/04/2019 - 12:40h	Cleverson Roberto da Luz	Solicitou alterações	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	
26/04/2019 - 13:04h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Reenviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Prezados, a carga horária semanal foi corrigido.
02/05/2019 - 11:31h	Cleverson Roberto da Luz	Solicitou alterações	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	
02/05/2019 - 15:27h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Reenviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	
03/05/2019 - 17:42h	Cleverson Roberto da Luz	Aprovou o projeto	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	
03/05/2019 - 17:44h	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	Aprovou o projeto	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	
06/05/2019 - 20:08h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Informou o início efetivo		
31/03/2021 - 06:00h		Prazo do projeto de pesquisa quase encerrado	Mario Rodolfo Roldan Daquilema, formulariopesquisa@contato.ufsc.br	
21/04/2021 - 14:59h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Enviou relatório final para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Prezados Senhores da Câmara de Pesquisa, considerar o seguinte relatório do projeto de Pesquisa para sua apreciação final.

RELATÓRIO DE PROJETO DE PESQUISA

PROJETO:

Entropia e Comportamento
Histórico de Difeomorfismos
Não-hiperbólicos

NUMERO:

No: 201904892

COORDENADOR:

MARIO ROLDÁN

PERÍODO:

30/04/2019 – 30/04/2021

Resumen

O presente, constitui o relatório de atividades do projeto de pesquisa intitulado *Entropia e Comportamento Histórico de Difeomorfismos Não-hiperbólicos* aprovado na Câmara de Pesquisa no dia 30/04/2019, conforme a Ata da 242^a reunião. O presente relatório responde o período de 30/04/2019 à 30/04/2021.

Palavras chaves

Entropia métrica, entropia topológica, teorema ergódico.

1 Descrição de Atividades

O objetivo principal do projeto foi o estudo do conjunto com comportamento histórico para sistemas dinâmicos não necessariamente hiperbólicos, más especificamente consideramos dinâmicas em dimensões baixas e dimensão alta e estudamos dinâmicas parcialmente hiperbólicas e o fluxo geométrico de Lorenz. É bem conhecido que em certos sistemas dinâmicos, como o sub-shift de tipo finito, a contribuição do conjunto de pontos irregulares (irrelevantes em Teoria Ergódica) resulta ser eficaz uma vez que estes conjuntos carregam entropia total. A contribuição dinâmica de tais conjuntos é considerado importante nesta área.

Como coordenador do evento da Escola de Verão 2019, aproveitei a oportunidade para convidar ao professor *Pablo Barrientos* da Universidad Federal do Rio de Janeiro para ministrar um minicurso durante a Escola, e também para trabalhar no artigo de pesquisa.

2 Atividades Realizadas

2.1 Artigos

1. Artigo publicado:

M. Roldán, R. Saghin, J. Yang. “*Entropy of partially hyperbolic flows with center dimension two*”- Publicado em 30 de dezembro de 2019.

O trabalho pode ser acesso no endereço <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6544/ab5156>.

2. Artigo a ser submetido:

P. Barrientos, Y. Nakano, A. Raibekas, M. Roldán. “*Topological Entropy and Hausdorff Dimension of Irregular Sets for Non-hyperbolic Dynamical Systems*”- 2021.

Para fines de este relatorio, no dia 20 de março, o trabalho foi colocado no arxiv, e pode ser acessado no endereço <https://arxiv.org/abs/2103.11262>. Pretende-se submeter o trabalho na revista *Ergodic Theory and Dynamical Systems* da Cambridge University Press.

Afirmo que, o trabalho ainda não foi submetido na revista mencionada pois estamos depurando um resultado que acreditamos será muito bem-vindo nesta revista.

2.2 Apresentação de Trabalho

(a) Seminario Grupo de Geometria:

Título: “*Número de Intercâmbios Polinomiales*” – 14 de setembro de 2020.

Trabalho apresentado no Seminario do Grupo de Geometria da da Universidad Central del Ecuador-UCE.

2.3 Participação em Eventos

- (a) **Conference Jacob Palis at IMPA:** – Rio de Janeiro. This meeting was focused on the presentation and discussion of the mathematical work of Jacob Palis, focusing on the new perspectives that his mathematical contributions have opened. Held at IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, from March 11 – 12, 2020.

2.4 Participação Banca

- (a) **Defesa de Disertação:** – Banca Examidadora De Defesa De Dissertação de Mestrado.
- Aluno: Anderson Zilio
 - Curso: Mestrado Proissional em Matemática - ProfMat
 - Data de defesa: 04 de dezembro de 2019.

2.5 Orientação

- (a) **Trabalho de Disertação:** – Taxa de Crescimento de Número de Permutações Permissíveis.
- Aluno: Jeison Wilberstaedt
 - Curso: Mestrado Proissional em Matemática - ProfMat
 - Data de Defesa: Previsto para Julho de 2021.

Entropy of partially hyperbolic flows with center dimension two

Mario Roldán¹, Radu Saghin² and Jiagang Yang^{3,4}

¹ Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Universitário Trindade, Florianópolis—SC, CEP 88.040-900, Brazil

² Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile

³ Department of Mathematics, Southern University of Science and Technology of China, 1088 Xueyuan Rd., Xili, Nanshan District, Shenzhen, Guangdong, 518055, People's Republic of China

⁴ Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Rua Mário Santos Braga s/n—Campus Valonguinhos, Niterói, Brazil

E-mail: roldan@impa.br, rsaghin@gmail.com and yangjg@impa.br

Received 9 November 2018, revised 6 May 2019

Accepted for publication 25 October 2019

Published 30 December 2019



CrossMark

Recommended by Professor Mark Pollicott

Abstract

In this article we study the regularity of the topological and metric entropy of partially hyperbolic flows with two-dimensional center direction. We show that the topological entropy is upper semicontinuous with respect to the flow, and we give an example where the lower semicontinuity fails. We also show that if such a flow has no fixed points, then it is entropy expansive, and consequently the metric entropy function is upper semicontinuous, there exist equilibrium states (and measures of maximal entropy), and principal symbolic extensions.

Keywords: topological entropy, entropy measure, partially hyperbolic flows

Mathematics Subject Classification numbers: 37D30, 37A35, 37B40, 37C40

1. Statements and results

The topological and metric entropy are important invariants in dynamical systems, they measure the complexity of the systems, and they were extensively studied during the last decades. On one hand one would like to understand the dependence of topological entropy with respect to perturbations of the system, and there are many studies in this direction, starting with works by Yomdin and Newhouse. On the other hand the dependence of the metric entropy with

TOPOLOGICAL ENTROPY AND HAUSDORFF DIMENSION OF IRREGULAR SETS FOR NON-HYPERBOLIC DYNAMICAL SYSTEMS

PABLO G. BARRIENTOS, YUSHI NAKANO, ARTEM RAIBEKAS, AND MARIO ROLDAN

ABSTRACT. We systematically investigate examples of non-hyperbolic dynamical systems having irregular sets of full topological entropy and full Hausdorff dimension. The examples include some partially hyperbolic systems and geometric Lorenz flows. We also pose interesting questions for future research.

1. INTRODUCTION

Let us consider a continuous map f of a totally bounded metric space X . We define the irregular set $I(f)$ of f as the set of points $x \in X$ such that there exists a continuous function $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ for which the time average

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$$

does not exist. It turns out that $I(f)$ has zero measure for any invariant measure by Birkhoff's ergodic theorem. Although this set is negligible from the point of view of Ergodic Theory, it is still possible to be topologically large or to have large topological entropy and Hausdorff dimension. In fact, dynamical systems with irregular sets of full topological entropy and full Hausdorff dimension have been intensively studied in the literature [PP84, BS00, FFW01, EKS05, Tho10, Tia17, MY17a, DOT18, FKKOT21]. However, most of these works only deal with continuous/smooth maps having inherent properties from (non)uniform hyperbolicity, such as the *specification-like property* or the *shadowing property*. In this paper, we establish full topological entropy and full Hausdorff dimension of the irregular set for abundant examples of dynamics without such properties, but well approximated by some hyperbolic structures. To our best knowledge, this is the first systematic investigation of such phenomena beyond the specification-like or shadowing property.

In Section 2 we study the topological entropy of irregular sets. In lower dimensions, we show that $I(f)$ has full topological entropy when f is a continuous map or a piecewise monotonic map of a compact interval (Theorem 2.3) and when f is a $C^{1+\alpha}$ -diffeomorphism of a compact surface (Corollary 2.4). We obtain the same result for some interesting higher

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 37B40, 37C40, 37C45.

Key words and phrases. Irregular set, topological entropy, Hausdorff dimension, non-hyperbolic systems.



UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FACULTAD DE CIENCIAS
DIRECCIÓN DE CARRERA

Oficio No. FC-DC-2020-121-OF
Quito, 14 de septiembre de 2020

Doctor
Mario Roldán, Ph.D.
Universidad Federal de Santa Catarina (UFSC)
Florianópolis, Brasil

De mi consideración:

Reciba usted un atento saludo, aprovechamos esta oportunidad para agradecerle por la conferencia: **"NÚMERO DE INTERCAMBIOS POLINOMIALES"**, dictada el 14 de septiembre de 2020, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central del Ecuador.

Agradecemos su brillante participación en nuestro evento.

Atentamente,

Dr. Danilo Gortaire Játiva, Ph.D.
SUBDECANO, DIRECTOR DE CARRERAS

Ing. Yasmína Atarihuana, Ph.D.

Mat. Juan Carlos García Navas Ph.D.

Comité Organizador de la Primera Escuela de Geometría
Facultad de Ciencias, Universidad Central del Ecuador

DGJ/S. Bravo

Conference Jacob Palis at IMPA

on the occasion of his 80th birthday

March 11-12, 2020

We hereby certify that, **Mario Rodolfo Roldan Daquilema** - **Universidade Federal de Santa Catarina**, participated in the *Conference Jacob Palis at IMPA*, held at IMPA, Rio de Janeiro, March 11 – 12, 2020.

Rio de Janeiro, March 13th, 2020



Lorenzo J. Díaz
Organizing Committee



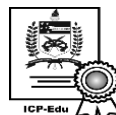


DECLARAÇÃO

Declaramos para os devidos fins que o(a) Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema participou da(s) seguinte(s) banca(s) de Mestrado, Doutorado e Exame de Qualificação no Mestrado Profissional em Matemática, no período de 2018 a 2020:

Aluno	Título	Data
Dissertação de Mestrado		
Anderson Zilio	Resolução de Problemas Olímpicos através da Combinatória e o Princípio da Casa dos Pombos	04/12/2019
Banca		Avaliação: Aprovado
Membro Titular - Externo	Aldrovando Luis Azeredo Araujo	Dr.
Membro Titular - Interno	Eliezer Batista	Dr.
Membro Titular - Interno	Leandro Batista Morgado	Dr.
Presidente	Felipe Lopes Castro	Dr.
Membro Titular - Interno	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Dr.
Josimara Edelisa Pereira	Uma introdução ao estudo de Diferenciais e suas propriedades clássicas. Equação da Onda e Equação do Calor	27/03/2019
Banca		Avaliação: Aprovado
Presidente	Ruy Coimbra Charao	Dr.
Membro Titular - Interno	Leandro Batista Morgado	Dr.
Membro Titular - Interno	Fábio Junior Margotti	Dr.
Membro Titular - Externo	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Dr.

Florianópolis, 20 de Abril de 2021.



Documento assinado digitalmente

Maria Inez Cardoso Gonçalves

Data: 20/04/2021 10:04:05-0300

CPF: 908.897.119-68

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

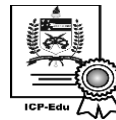


DECLARAÇÃO

Declaramos que o(a) Prof. Dr. Mario Rodolfo Roldan Daquilema orientou/orienta o(s) seguinte(s) mestrando(s) e doutorando(s) do Mestrado Profissional em Matemática, no período de 2018 a 2020.

Nível	Aluno	Início	Término
Orientados (em andamento)			
<i>Mestrandos</i>			
	Jeison Marion Wilberstaedt	26/02/2018	23/07/2021

Florianópolis, 20 de Abril de 2021.



Documento assinado digitalmente

Maria Inez Cardoso Gonçalves

Data: 20/04/2021 10:04:54-0300

CPF: 908.897.119-68

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

**Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 20/04/2021**

Assinatura Proponente

.....

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

**Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....