UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

S U M Á R I O

Requerente(s): **Prof. Mykola Khrypchenko**
Título do Projeto: **Álgebras de incidência e suas generalizações**
Assunto: **Projeto de Pesquisa.**

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107035

1. Título:

Álgebras de incidência e suas generalizações

2. Resumo:

O projeto é dedicado ao estudo de aplicações lineares sobre álgebras de incidência e suas generalizações. Estudaremos o problema de caracterização dos conjuntos parcialmente ordenados finitos e conexos X, tais que todo automorfismo de Lie de $I(X,K)$ é próprio. Também investigaremos as aplicações lineares em $I(X,K)$ que preservam idempotentes, tendo como objetivo provar que tal aplicação é um homomorfismo de Jordan. Finalmente, daremos início ao estudo de uma nova classe de álgebras, chamadas de álgebras de incidência bandeira. Trabalharemos sobre o problema de isomorfismo para tais álgebras e os problemas de descrição dos seus automorfismos e derivações.

Palavras-chave:

álgebra de incidência; automorfismo de Lie; automorfismo de Lie próprio; homomorfismo de Jordan; álgebra de incidência bandeira; problema de isomorfismo; automorfismo; derivação;

3. Coordenador:

Nome: Mykola Khrypchenko
Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM
Tipo: Professor
Regime de Trabalho: de
Valor Mensal: Sem remuneração
Forma de Remuneração: Sem bolsa
Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:
Valor Total: R$ 0,00
Fundações:
Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Inicio: 01/05/2021
Início Efetivo: A partir da data da assinatura.
Duração: 24 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA
Área do Conhecimento: MATEMATICA
Subárea do conhecimento:ALGEBRA
Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107035

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Mykola Khrypchenko 235.607.588-74	Professor Coordenador	01/05/2021 à 30/04/2023	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R$ 0,00 / R$ 0,00		20.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107035

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
30/04/2021 - 11:00h	Mykola Khrypchenko	Criou o projeto		
30/04/2021 - 11:00h	Mykola Khrypchenko	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Bom dia. Estou enviando para aprovação um projeto de pesquisa de 20h semanais com período de 24 meses a partir do dia 01/05/2021. Obrigado.

Projeto de Pesquisa

Título:	álgebras de incidência e suas generalizações
Proponente:	Mykola Khrypchenko (UFSC)
Colaboradores:	Érica Z. Fornaroli (UEM), Ednei A. Santulo Jr. (UEM), Jorge José Garcés Pérez (Univ. Politécnica de Madrid)

Período: 01/05/2021 a 30/04/2023,
Número de horas semanais: 20

Resumo

O projeto é dedicado ao estudo de aplicações lineares sobre álgebras de incidência e suas generalizações. Estudaremos o problema de caracterização dos conjuntos parcialmente ordenados finitos e conexos X, tais que todo automorfismo de Lie de $I(X, K)$ é próprio. Também investigaremos as aplicações lineares em $I(X, K)$ que preservam idempotentes, tendo como objetivo provar que tal aplicação é um homomorfismo de Jordan. Finalmente, daremos início ao estudo de uma nova classe de álgebras, chamadas de álgebras de incidência bandeira. Trabalharemos sobre o problema de isomorfismo para tais álgebras e os problemas de descrição dos seus automorfismos e derivações.

Palavras-chave: álgebra de incidência; automorfismo de Lie; automorfismo de Lie próprio; homomorfismo de Jordan; álgebra de incidência bandeira; problema de isomorfismo; automorfismo; derivação.

Conteúdo

1 Álgebras de incidência

1.1 Histórico

1.1.1 Álgebras de incidência e problema de isomorfismo

A *álgebra de incidência* $I(P, F)$ de um conjunto parcialmente ordenado localmente finito P sobre um corpo F foi introduzida por J.-C. Rota em [52] como um instrumento para resolver vários problemas combinatórios na série de trabalhos "On the foundations of combinatorial theory".

Estes trabalhos despertaram um interesse sobre a álgebra $I(P, F)$ em si como um objeto de pesquisa e levaram no início da década 70 aos artigos que identificaram as direções do desenvolvimento da teoria de álgebras de incidência. Stanley [59] foi o primeiro que formulou e resolveu o *problema de isomorfismo* para álgebras de incidência e, como uma consequência, descreveu o grupo de automorfismos exteriores desta álgebra. Doubilet, Rota e Stanley [20] deram início ao estudo de propriedades algébricas de $I(P, F)$, em particular, eles descreveram o radical de Jacobson e o reticulado dos ideais fechados de $I(P, F)$.

Logo depois Belding [4] estendeu naturalmente a definição da álgebra de incidência ao caso de conjuntos quase ordenados localmente finitos e anéis não-comutativos. O objeto construído era um anel que Belding chamou do anel de incidência. Entre os outros resultados, o autor obteve os critérios de inversibilidade e descreveu o centro do *anel de incidência*. Além do mais, foi resolvido o problema de isomorfismo sobre um corpo sob a hipótese de que um dos dois conjuntos é finito.

O problema de isomorfismo foi estudado também nos trabalhos de N. A. Nachev [46], E. R. Voss [60], P. Leroux [44], P. Ribenboim [51], J. K. Haack [28], J. Froelich [27], M. M. Parmenter [49], M. M. Parmenter junto com J. H. Schmerl e E. Spiegel [50], S. Dascaulescu e L. van Wyk [22]. Atualmente, os resultados mais gerais sobre esta questão foram obtidos nos artigos de Abrams-Haefner-del Rio [1, 2], porém o problema principal de descrição dos anéis, para os quais o teorema de isomorfismo é verdadeira, ainda está em aberto.

1.1.2 Generalizações para conjuntos não localmente finitos

Quando P não é localmente finito, o produto em $I(P, F)$ não está definido em geral, então $I(P, F)$ tem apenas uma estrutura de espaço vetorial sobre F. Ao mesmo tempo, por exemplo, o conjunto de células de um CW-complexo não-compacto não é localmente finito. Por outro lado, tais operações como soma e produto de conjuntos parcialmente ordenados não preservam finitude local. Portanto parecia natural tentar estender a noção de uma álgebra de incidência a este caso.

No trabalho de Singh e Al-Thukair [54], no caso de um conjunto parcialmente ordenado P com classes finitas e um anel comutativo R, os autores introduziram uma álgebra $I^*(X, R)$ que eles chamaram da *álgebra de incidência fraca* de P sobre R. É uma generalização parcial da álgebra de incidência, porque essas duas álgebras coincidem apenas para conjuntos com um número finito dos segmentos não-triviais. O resultado principal do trabalho é o teorema de isomorfismo para álgebras de incidência fracas sobre anéis indecomponíveis.

Uma outra generalização de $I(P, F)$ foi definida por Khripchenko e Novikov em [38]. A ideia foi, no caso de P parcialmente ordenado qualquer, considerar um subconjunto $FI(P, F)$ de funções de $I(P, F)$ para os quais a convolução faz sentido. O conjunto

$FI(P,F)$ acabou sendo uma álgebra que foi chamada da álgebra de incidência finitária. Foram descritos os elementos inversíveis, o radical de Jacobson, os idempotentes e os elementos regulares de $FI(P,F)$. Como uma consequência, uma solução positiva do problema de isomorfismo para estas álgebras foi obtida.

Para generalizar os conceitos ao caso de conjuntos quase ordenados, Khripchenko definiu em [35] as noções de uma categoria parcialmente ordenada $\mathcal{C}$ e dos anéis de incidência finitário $FI(\mathcal{C})$ e fraco $I^*(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. Em seguida, a cada conjunto quase ordenado P e um anel R ele associou uma categoria parcialmente ordenada $\mathcal{C}(P,R)$, e o anel de incidência finitário dessa categoria foi chamado do anel de incidência de P sobre R e foi denotado por $FI(P,R)$. Analogamente foi definido o anel de incidência fraco $I^*(P,R)$ de P sobre R. O autor estendeu as descrições dos elementos inversíveis, do radical de Jacobson, dos idempotentes e dos elementos regulares ao caso de $FI(\mathcal{C})$. Para $FI(P,R)$ ele obteve uma solução enfraquecida do problema de isomorfismo, no sentido que $FI(P,R) \cong FI(Q,S) \Rightarrow \mathcal{C}(P,R) \cong \mathcal{C}(Q,S)$, quando os anéis R e S são indecomponíveis (veja [35, 36]). O problema de isomorfismo para $I^*(P,R)$ foi reduzido ao problema de isomorfismo para $FI(P,R)$ e portanto resolvido com a mesma hipótese sobre R e S.

1.1.3 Aplicações lineares sobre álgebras de incidência

Automorfismos e generalizações. Para aprender melhor a estrutura de um objeto algébrico, é natural estudar aplicações que preservam essa estrutura. Na área de álgebras de incidência o primeiro resultado clássico desse tipo foi a descrição dos *automorfismos* de $I(P,F)$ feito por Stanley em [59]. O resultado foi generalizado em várias direções por Baclawski [3], Scharlau [53], Feinberg [25], Haack [28], Spiegel [56, 57], Coelho [16, 17], Jøndrup [30, 31, 32], Koppinen [42, 43], Drozd e Kolesnik [21], Khripchenko [34].

Anti-automorfismos e *involuções* de álgebras de incidência foram estudadas por Brusamarello e Lewis [12], Brusamarello, Fornaroli e Santulo [9, 10, 11], onde as descrições análogas à descrição dos automorfismos foram obtidas.

Dugas investigou em [23] uma classe de aplicações lineares $FI(P,F) \to I(P,F)$ e a *propriedade de Zassenhaus* para a álgebra $FI(P,F)$, para o $FI(P,F)$-módulo $I(P,F)$ e para a idealização $R(P,F) = FI(P,F)(+)I(P,F)$ desse módulo. Em seguida, Dugas e Wagner descreveram em [24] os automorfismos de $R(P,F)$ e estudaram quando $FI(P,F)$ é uma ZPD-álgebra[1].

Courtemanche, Dugas e Herden mostraram em [19] que *automorfismos locais* de $FI(P,F)$ são, na maioria dos casos, automorfismos, obtendo para tais aplicações as decomposições análogas às de [34].

Brusamarello, Fornaroli e Khrypchenko provaram em [7] que todo *isomorfismo de Jordan* R-linear de $FI(X,R)$ em uma R-algebra A é a near-soma de um homomorfismo e um anti-homomorfismo. Em seguida, eles investigaram em [8] o problema de decomposição de um isomorfismo de Jordan de $FI(\mathcal{C})$ na (near-)soma de um homomorfismo e um anti-homomorfismo.

Fornaroli, Khrypchenko e Santulo Jr. descreveram em [26] *automorfismos de Lie* da álgebra de incidência $I(X,K)$ de um conjunto parcialmente ordenado finito e conexo X sobre um corpo K. Em particular, eles mostraram que tais automorfismos em geral não são próprios.

[1] "ZPD" significa "zero product determined".

Derivações e generalizações. Junto com automorfismos, os autores frequentemente investigaram *derivações* da álgebra de incidência. A primeira descrição das derivações de $I(P, R)$ foi obtida no trabalho de Baclawski [3]. Mais tarde este resultado foi generalizado por Burkov [13], Nowicki [47], Jøndrup [30, 32], Coelho e Polcino Milies [18], Spiegel e O'Donnell [58], Khripchenko [37] e Khrypchenko [40].

Khrypchenko [39] encontrou um critério para que todas *derivações de Jordan* do anel $FI(P, R)$ sejam derivações e generalizou assim o resultado de Xiao [62].

Zhang e Khrypchenko mostraram que todas as *derivações de Lie* da álgebra de incidência $I(P, R)$ são próprias, onde P é um conjunto quase ordenado localmente finito e R é um anel comutativo livre de 2-torção. Sob algumas hipóteses naturais sobre R, Khrypchenko e Wei provaram em [41] que cada *derivação de tipo Lie* da álgebra de incidência finitária $FI(P, R)$ de um poset P sobre um anel comutativo R com 1 é própria.

Kaygorodov, Khrypchenko e Wei provaram em [33] que cada *derivação superior* da álgebra de incidência finitária $FI(P, R)$ de um poset P sobre um anel comutativo R com 1 se decompõe no produto de uma derivação superior interna de $FI(P, R)$ e a derivação superior de $FI(P, R)$ induzida por uma aplicação transitiva superior.

1.2 Problemas para pesquisa

1.2.1 Automorfismos de Lie próprios de $I(X, K)$

Como foi mencionado acima, nem todo automorfismo de Lie de $I(X, K)$ é *próprio*, i.e. decompõe-se na soma de um automorfismo ou menos anti-automorfismo de $I(X, K)$ e uma aplicação linear com valores no centro de $I(X, K)$. Surge a pergunta natural.

Questão 1. Quais são os conjuntos parcialmente ordenados finitos e conexos X, tais que todo automorfismo de Lie de $I(X, K)$ é próprio?

Mais precisamente, qualquer automorfismo de Lie de $I(X, K)$ é a composição de um automorfismo interno e o automorfismo de Lie *elementar* $\tau_{\theta,\sigma,c}$ induzido por uma tripla (θ, σ, c) em que θ é uma bijeção do conjunto $B = \{e_{xy} \mid x < y\}$ que é *monótona em cadeias maximais de* X e satisfaz uma propriedade técnica, chamada de *admissibilidade*, que tem a ver com caminhos fechados em X, σ é uma aplicação de $X^2_< = \{(x, y) \mid x < y\}$ em K^* compatível com θ e $c = (c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ tal que $\sum_{i=1}^n c_i \in K^*$. Como a composição de um automorfismo de Lie próprio e um automorfismo interno é um automorfismo de Lie próprio, basta considerar automorfismos de Lie elementares. O primeiro passo seria reduzir o estudo de automorfismos de Lie próprios ao estudo de bijeções θ *próprias*, i.e. induzidas por automorfismos ou anti-automorfismos de X.

Problema 1. Provar que o automorfismo de Lie elementar $\tau_{\theta,\sigma,c}$ é próprio se e somente se a bijeção θ é própria.

Problema 2. Provar que todo automorfismo de Lie de $I(X, K)$ é próprio se e somente se toda bijeção θ de B monótona em cadeias maximais de X e admissível é própria.

Cabe observar que a solução do Problema 2 não segue imediatamente da solução do Problema 1, pois ainda teríamos que mostrar que toda bijeção θ monótona em cadeias maximais de X admite σ compatível com θ, o que não é trivial.

Finalmente, o desafio principal é o seguinte.

Problema 3. Caracterizar os conjuntos parcialmente ordenados finitos e conexos X, tais que toda bijeção θ monótona em cadeias maximais de X e admissível é própria.

1.2.2 Automorfismos de Lie de $J(I(X,K))$

Relembremos [58] que o radical de Jacobson $J(I(X,K))$ da álgebra de incidência $I(X,R)$ consiste dos elementos $f \in I(X,R)$ que satisfazem $f(x,x) \in J(R)$ para todo $x \in X$. Em particular, se K é um corpo, então

$$J(I(X,K)) = \{f \in I(X,K) \mid \forall x \in X : \ f(x,x) = 0\}.$$

Quando X é finito, o ideal $J(I(X,K))$ admite uma outra descrição, a saber, foi provado em [26] que

$$J(I(X,K)) = [I(X,K), I(X,K)] = \mathrm{span}_K\{[f,g] \mid f,g \in I(X,K)\}$$

em que $[f,g] = fg - gf$. Obviamente, todo automorfismo de Lie φ de $I(X,K)$ leva $J(I(X,K))$ em $J(I(X,K))$, mas teoricamente podem existir automorfismos de Lie de $J(I(X,K))$ que não vêm de automorfismos de Lie de $I(X,K)$. Quando X é uma cadeia finita, os automorfismos de Lie de $J(I(X,K))$ foram descritos em [14]. O caso particular de automorfismos usuais de $J(I(X,K))$ para o mesmo X foi considerado em [15, 48]. Decomposições dos automorfismos (de Lie) de $J(I(X,K))$ em produto de automorfismos (de Lie) mais simples foram obtidas.

Aparentemente, o caso de X um poset arbitrário e R um anel comutativo é muito complicado, como vimos em [26]. Portanto, podemos começar com o seguinte problema particular.

Problema 4. Descrever os automorfismos da álgebra $J(I(X,K))$, em que X é um conjunto parcialmente ordenado finito e conexo e K é um corpo.

Em seguida passaremos para o problema mais geral.

Problema 5. Descrever os automorfismos de Lie da álgebra $J(I(X,K))$, em que X é um conjunto parcialmente ordenado finito e conexo e K é um corpo.

1.2.3 Aplicações lineares que preservam idempotentes de $I(X,K)$

O problema de descrição de aplicações que preservam matrizes idempotentes é bastante antigo. Brešar e Šemrl mostraram em [5] que uma aplicação linear θ sobre $M_n(\mathbb{C})$ que leva uma matriz *potente* (i.e. tal que $A^r = A$ para um inteiro $r \geq 2$) em uma matriz potente é um automorfismo multiplicado por uma raiz da unidade c ou um anti-automorfismo multiplicado por c. Em [6] eles consideraram a álgebra mais geral $M_n(R)$, em que R é um anel comutativo com 1 e $\frac{1}{2}$, e uma aplicação sobre $M_n(R)$ que preserva apenas idempotentes. Foi provado que tal aplicação é um homomorfismo de Jordan (e portanto a soma de um homomorfismo e um anti-homomorfismo pelo resultado clássico de Jacobson e Rickart [29]).

Molnár e Šemrl descreveram em [45] as aplicações lineares sobre $T_n(\mathbb{C})$ que preservam matrizes de posto 1 e, como corolário, aquelas que são bijetoras e preservam matrizes idempotentes de posto 1. Essas últimas são somas de um automorfismo ou um automorfismo com uma aplicação que toma valores nas matrizes estritamente triangulares superiores. Sem restrição ao posto, foi provado que uma aplicação que preserva idempotentes de $T_n(\mathbb{C})$ é um homomorfismo de Jordan. Słowik considerou em [55] a álgebra $T_\infty(F)$ de matrizes triangulares superiores infinitas (contáveis) sobre um corpo F de característica diferente de 2 e aplicações lineares ϕ sobre $T_\infty(F)$ tais que para todo $\lambda \in F$: $x - \lambda y$ é idempotente se e somente se $\phi(x) - \lambda\phi(y)$ é idempotente. Foram obtidas decomposições de tais aplicações em aplicações mais simples.

Como $T_n(F)$ e $T_\infty(F)$ são casos particulares da álgebra de incidência, surge naturalmente o seguinte.

Problema 6. Descrever as aplicações lineares sobre $I(P,F)$ que preservam idempotentes.

Podemos especificar o problema acima.

Problema 7. Seja A uma álgebra e $\phi : I(P,F) \to A$ uma aplicação linear que preserva idempotentes. Provar que ϕ é um homomorfismo de Jordan no seguintes casos:

(i) P é finito;

(ii) ϕ é bijetora.

1.3 Metodologia

Nos Problemas 1 and 2 usaremos a definição de $\tau_{\theta,\sigma,c}$ e algumas propriedades de automorfismos de Lie elementares provadas em [26]. Problema 3 será dividido em partes: consideraremos separadamente o caso de conjuntos X cujas cadeias maximais são equivalentes em um certo sentido e o caso de conjuntos de comprimento 1 (nos quais qualquer cadeia maximal é equivalente apenas a si mesma). O caso geral seria uma mistura destes 2 casos extremais.

No estudo de Problemas 4 and 5 adaptaremos os métodos de [14, 15, 48] ao caso de X um poset finito conexo qualquer.

Para resolver Problemas 6 and 7 investigaremos o comportamento de uma aplicação que preserva idempotentes sobre os elementos e_{xy}, como foi feito em [45, 6]. Provavelmente, precisaremos da descrição dos idempotentes de $I(P,F)$ que foi obtida em [38].

2 Álgebras de incidência bandeira

2.1 Histórico

Há uma generalização relativamente nova de álgebras de incidência que foi introduzida no preprint recente [61] e não foi bem estudada ainda. Sejam P um poset localmente finito, R um anel comutativo e $n \geq 2$ inteiro. Denotemos

$$Fl^n(P) = \{(x_1, \dots, x_n) \in P^n \mid x_1 \leq \cdots \leq x_n\}.$$

A *n-ésima álgebra de incidência bandeira*[2] *de P sobre R* é o R-módulo $I^n(P,R)$ de funções $f : Fl^n(P) \to R$ com a seguinte multiplicação

$$(fg)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_i \leq y_i \leq x_{i+1}} f(x_1, y_1, \dots, y_{n-1})g(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n). \tag{1}$$

2.2 Problemas para pesquisa

Obviamente, $I^2(P,R)$ é a álgebra de incidência clássica. Para $n \geq 3$ a álgebra $I^n(P,R)$ nunca é associativa e nunca tem 1. O artigo [61] foi dedicado ao estudo de alguns elementos particulares de $I^n(P,R)$, mas as propriedades algébricas de $I^n(P,R)$ não foram bem investigados. Portanto, os seguintes problemas surgem naturalmente.

[2] n-th flag incidence algebra

Problema 8 (Problema de isomorfismo)**.** Sejam F um corpo e $n \geq 3$. Provar que $I^n(P,F) \cong I^n(Q,R) \Rightarrow P \cong Q$.

Problema 9. Sejam F um corpo e $n \geq 3$. Descrever o grupo dos automorfismos da álgebra $I^n(P,F)$.

Observe que neste caso não há mais automorfismos internos e também dá para ver que não há automorfismos multiplicativos não triviais. Então, temos a seguinte.

Conjetura 1. Sejam F um corpo e $n \geq 3$. Então $\mathrm{Aut}\,(I^n(P,F)) \cong \mathrm{Aut}\,(P)$.

Junto com os automorfismos, vale a pena estudar as derivações também.

Problema 10. Sejam R um anel comutativo e $n \geq 3$. Descrever a álgebra de Lie das derivações da álgebra $I^n(P,F)$.

Novamente, não há derivações internas, nem aditivas, portanto temos o seguinte.

Conjetura 2. Sejam R um anel comutativo e $n \geq 3$. Então $\mathrm{Der}\,(I^n(P,F)) = \{0\}$.

2.3 Metodologia

Por simplicidade, começaremos com o caso $|P| < \infty$. Primeiramente, teríamos que introduzir uma base natural em $I^n(P,F)$ e estudar as suas propriedades. O análogo do radical $J(I(P,F))$ pode ser definido para $I^n(P,F)$ também, e é um ideal em $I^n(P,F)$. Vale a pena obter uma descrição deste ideal em termos da multiplicação em $I^n(P,F)$ para depois mostrar que ele é preservado por um isomorfismo de Problema 8. Faz sentido estudar idempotentes primitivos de $I^n(P,F)$ e do quociente de $I^n(P,F)$ pelo ideal mencionado, pois eles podem ser úteis na resolução de Problema 9. Finalmente, Problema 10 pode ser resolvido, aplicando derivações aos elementos da base e estudando as relações que seguem da regra de Leibniz.

Referências

[1] Abrams, G., Haefner, J., and del Río, Á. The isomorphism problem for incidence rings. *Pacific J. Math. 187*, 2 (1999), 201–214.

[2] Abrams, G., Haefner, J., and del Río, Á. Corrections and addenda to 'The isomorphism problem for incidence rings'. *Pacific J. Math. 207*, 2 (2002), 497–506.

[3] Baclawski, K. Automorphisms and derivations of incidence algebras. *Proc. Amer. Math. Soc. 36*, 2 (1972), 351–356.

[4] Belding, W. R. Incidence rings of pre-ordered sets. *Notre Dame J. Formal Logic 14* (1973), 481–509.

[5] Brešar, M., and Šemrl, P. Linear transformations preserving potent matrices. *Proc. Am. Math. Soc. 119*, 1 (1993), 81–86.

[6] Brešar, M., and Šemrl, P. Mappings which preserve idempotents, local automorphisms, and local derivations. *Can. J. Math. 45*, 3 (1993), 483–496.

[7] Brusamarello, R., Fornaroli, E., and Khrypchenko, M. Jordan Isomorphisms of Finitary Incidence Algebras. *Linear and Multilinear Algebra 66*, 3 (2018), 565–579.

[8] Brusamarello, R., Fornaroli, É. Z., and Khrypchenko, M. Jordan Isomorphisms of the Finitary Incidence Ring of a Partially Ordered Category. *Colloquium Mathematicum 159*, 2 (2020), 285–307.

[9] Brusamarello, R., Fornaroli, É. Z., and Santulo, E. A. Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras. *Linear Multilinear Algebra 60*, 2 (2012), 181–188.

[10] Brusamarello, R., Fornaroli, É. Z., and Santulo, E. A. Classification of involutions on finitary incidence algebras. *Int. J. Algebra Comput. 24*, 8 (2014), 1085–1098.

[11] Brusamarello, R., Fornaroli, É. Z., and Santulo, E. A. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Comm. Algebra 43*, 2 (2015), 726–736.

[12] Brusamarello, R., and Lewis, D. W. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear Multilinear Algebra 59*, 11 (2011), 1247–1267.

[13] Burkov, V. D. Derivations of generalized quasimatrix rings. *Math. Notes 24*, 1 (1978), 563–569.

[14] Cao, Y. Automorphisms of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over certain commutative rings. *Linear Algebra Appl. 329*, 1-3 (2001), 175–187.

[15] Cao, Y., and Wang, J. A note on algebra automorphisms of strictly upper triangular matrices over commutative rings. *Linear Algebra Appl. 311*, 1-3 (2000), 187–193.

[16] Coelho, S. P. The automorphism group of a structural matrix algebra. *Linear Algebra Appl. 195* (1993), 35–58.

[17] Coelho, S. P. Automorphism groups of certain structural matrix rings. *Comm. Algebra 22*, 14 (1994), 5567–5586.

[18] Coelho, S. P., and Polcino Milies, C. Derivations of upper triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl. 187* (1993), 263–267.

[19] Courtemanche, J., Dugas, M., and Herden, D. Local automorphisms of finitary incidence algebras. *Linear Algebra Appl. 541* (2018), 221–257.

[20] Doubilet, P., Rota, G.-C., and Stanley, R. P. On the foundations of combinatorial theory. VI. The idea of generating function. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. II: Probability theory. Univ. California Press, 1972, pp. 267–318.

[21] Drozd, Y., and Kolesnik, P. Automorphisms of incidence algebras. *Comm. Algebra 35*, 12 (2007), 3851–3854.

[22] Dăscălescu, S., and van Wyk, L. Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? *Proc. Amer. Math. Soc. 124*, 5 (1996), 1385–1391.

[23] Dugas, M. Homomorphisms of finitary incidence algebras. *Comm. Algebra 40*, 7 (2012), 2373–2384.

[24] Dugas, M., and Wagner, B. Finitary incidence algebras and idealizations. *Linear Multilinear Algebra 64*, 10 (2016), 1936–1951.

[25] Feinber, R. B. Faithful distributive modules over incidence algebras. *Pacific J. Math. 65*, 1 (1976), 35–45.

[26] Fornaroli, É. Z., Khrypchenko, M., and Santulo Jr., E. A. Lie Isomorphisms of Incidence Algebras. (arXiv:2012.06661) (2020).

[27] Froelich, J. The isomorphism problem for incidence rings. *Illinois J. Math. 29*, 1 (1985), 142–152.

[28] Haack, J. K. Isomorphisms of incidence rings. *Illinois J. Math. 28*, 4 (1984), 676–683.

[29] Jacobson, N., and Rickart, C. E. Jordan homomorphisms of rings. *Trans. Amer. Math. Soc. 69* (1950), 479–502.

[30] Jøndrup, S. Automorphisms of upper triangular matrix rings. *Arch. Math. 49*, 6 (1987), 497–502.

[31] Jøndrup, S. The Group of Automorphisms of Certain Subalgebras of Matrix Algebras. *J. Algebra 141* (1991), 106–114.

[32] Jøndrup, S. Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl. 221* (1995), 205–218.

[33] Kaygorodov, I., Khrypchenko, M., and Wei, F. Higher Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Algebras and Representation Theory 22*, 6 (2019), 1331–1341.

[34] Khripchenko, N. S. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Math. 9*, 2 (2010), 78–97.

[35] Khripchenko, N. S. Finitary incidence algebras of quasiorders. *Matematychni Studii 34*, 1 (2010), 30–37.

[36] Khripchenko, N. S. Regular elements of finitary incidence rings. *Bulletin of University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*, 3 (2010), 28–30.

[37] Khripchenko, N. S. Derivations of finitary incidence rings. *Comm. Algebra 40*, 7 (2012), 2503–2522.

[38] Khripchenko, N. S., and Novikov, B. V. Finitary incidence algebras. *Comm. Algebra 37*, 5 (2009), 1670–1676.

[39] Khrypchenko, M. Jordan derivations of finitary incidence rings. *Linear Multilinear Algebra 64*, 10 (2016), 2104–2118.

[40] Khrypchenko, M. Local Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Acta Mathematica Hungarica 154*, 1 (2018), 48–55.

[41] Khrypchenko, M., and Wei, F. Lie-type Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Rocky Mountain J. Math. 50*, 1 (2020), 163–175.

[42] Koppinen, M. Automorphisms and Higher Derivations of Incidence Algebras. *J. Algebra 174* (1995), 698–723.

[43] Koppinen, M. Three automorphism theorems for triangular matrix algebras. *Linear Algebra Appl. 245* (1996), 295–304.

[44] Leroux, P. The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories. *Illinois J. Math. 26*, 1 (1982), 52–61.

[45] Molnár, L., and Šemrl, P. Some linear preserver problems on upper triangular matrices. *Linear Multilinear Algebra 45*, 2-3 (1998), 189–206.

[46] Nachev, N. A. On incidence rings. *Moscow Univ. Math. Bull. 32*, 1 (1977), 29–34.

[47] Nowicki, A. Derivations of special subrings of matrix rings and regular graphs. *Tsukuba J. Math. 7*, 2 (1983), 281–297.

[48] Özkan, Ö., and Mustafa, A. Automorphisms of a certain subalgebra of the upper triangular matrix algebra. *Hacet. J. Math. Stat. 49*, 3 (2020), 1150–1158.

[49] Parmenter, M. M. Isomorphic incidence algebras of graphs. *Indian J. Math. 35*, 2 (1993), 147–153.

[50] Parmenter, M. M., Schmerl, J. H., and Spiegel, E. Isomorphic incidence algebras. *Adv. Math. 84*, 2 (1990), 226–236.

[51] Ribenboim, P. The algebra of functions on a graph. *Studia Sci. Math. Hungar. 17*, 1–4 (1982), 1–20.

[52] Rota, G.-C. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2*, 4 (1964), 340–368.

[53] Scharlau, W. Automorphisms and involutions of incidence algebras. In *Proceedings of the International Conference on Representations of Algebras (Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974), Paper No. 24*. Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974, pp. 11 pp. Carleton Math. Lecture Notes, No. 9.

[54] Singh, S., and Al-Thukair, F. Weak incidence algebra and maximal ring of quotients. *Int. J. Math. Math. Sci. 2004*, 53 (2004), 2835–2845.

[55] Słowik, R. Maps on infinite triangular matrices preserving idempotents. *Linear Multilinear Algebra 62*, 7 (2014), 938–964.

[56] Spiegel, E. Automorphisms of incidence algebras. *Comm. Alg. 21*, 8 (1993), 2973–2981.

[57] Spiegel, E. On the automorphisms of incidence algebras. *J. Algebra 239* (2001), 615–623.

[58] Spiegel, E., and O'Donnell, C. J. *Incidence Algebras*. Monographs and Textbooks in Pure and. Applied Mathematics, vol. 206. Marcel Dekker, Inc., 1997.

[59] Stanley, R. P. Structure of incidence algebras and their automorphism groups. *Bull. Amer. Math. Soc. 76* (1970), 1236–1239.

[60] Voss, E. R. On the isomorphism problem for incidence rings. *Illinois J. Math. 24*, 4 (1980), 624–638.

[61] Wakefield, M. Partial flag incidence algebras. (`arXiv:1605.01685`) (2016).

[62] Xiao, Z. Jordan derivations of incidence algebras. *Rocky Mountain J. Math. 45*, 4 (2015), 1357–1368.

Florianópolis,
6 de abril de 2021

Mykola Khrypchenko

PROCESSO Nº 202107035

Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 20/04/2021

Documento assinado digitalmente
Mykola Khrypchenko
Data: 27/07/2021 21:41:36-0300
CPF: 235.607.588-74
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

GOV.BR

Assinatura Proponente

....

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 27/07/2021 19:07:59-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

ICP-Edu

Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....