UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

S U M Á R I O

Requerente(s): **Prof. Mario Rodolfo Roldan Daquilema**
Título do Projeto: **Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Históricos para Difeomorfismos Não-hiperbólicos**
Assunto: **Projeto de Pesquisa.**

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202106386

1. Título:

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Históricos para Difeomorfismos Não-hiperbólicos

2. Resumo:

O objetivo do presente projeto de pesquisa contempla o estudo do conjunto com comportamento histórico para sistemas dinâmicos não necessariamente hiperbólicos, más específicamente, estes conjuntos carregam entropia total? qual é a dimenssão de Hausdorff de estes conjuntos? É bem conhecido que em certos sistemas dinâmicos, como o sub-shift de tipo finito, a contribuição do conjunto de pontos irregulares (irrelevantes em Teoria Ergódica) resulta ser eficaz uma vez que estes conjuntos carregam entropia total. A contribuição dinâmica de tais conjuntos é considerado importante nesta área. Foi o trabalho de Takens que deu o pontapé inicial para seu estudo. O presente projeto pretende dar continuidade ao estudo destes conjuntos que também foram estudados no anterior projeto de pesquisa onde damos várias dinámicas hiperbólicas e não-hiperbólicas cujo conjunto histórica carrega entropia total, alguns deles carregam dimensão de Hausdorff total. Pretendemos estudar mais dinâmicas com esta rica propriedade. A execução do projeto implica explorar novas formas de aproximação de dinâmicas (i.e. aproximação por entropia de conjuntos hiperbólicos).

Palavras-chave:

entropia, hiperbolicidade parcial;Entropía Topológica; Entropia Métrica; Dimensão de Hausdorff, Comportamento Histórico;

3. Coordenador:

Nome: Mario Rodolfo Roldan Daquilema
Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM
Tipo: Professor
Regime de Trabalho: DE
Valor Mensal: Sem remuneração
Forma de Remuneração: Sem bolsa
Carga Horária Semanal: 10.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:
Valor Total: R$ 0,00
Fundações:
Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Inicio: 30/04/2021
Início Efetivo: A partir da data da assinatura.
Duração: 24 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA
Área do Conhecimento: MATEMATICA
Subárea do conhecimento:GEOMETRIA E TOPOLOGIA
Grupo de Pesquisa:

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202106386

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202106386

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Mario Rodolfo Roldan Daquilema 060.425.697-32	Professor Coordenador	30/04/2021 à 29/04/2023	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R$ 0,00 / R$ 0,00		10.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202106386

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
19/04/2021 - 13:55h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Criou o projeto		
21/04/2021 - 14:58h	Mario Rodolfo Roldan Daquilema	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Prezados Senhores da Câmara de Extensão, segue o seguinte Projeto de Pesquisa para sua devida apreciação.

PROJETO DE PESQUISA

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Históricos para Difeomorfismos Não-hiperbólicos

MARIO ROLDAN

20 de abril de 2021

I Preliminares

I.1 Comportamento histórico

Diz-se que uma propiedade P é C^r-*persistente* se a clausura do conjunto $\mathscr{Y}_P$ de todos os difeomorfismos que verificam a propiedade P contêm algum aberto $\mathscr{U} \in \mathrm{Diff}^r(M)$. A propiedade P será chamda C^r-*robusta* se o conjunto $\mathscr{Y}_P$ é aberto em $\mathrm{Diff}^r(M)$. Note que propiedades C^r-robustas são propiedades C^r-persistentes, o recíproco nem sempre é certo.

Órbitas com comportamento histórico.

Seja X um espaço métrico compacto e $f\colon X \to X$ uma função continua. Dado $x \in X$ diz-se que a órbita $\mathscr{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ têm *comportamento histórico* (terminologia introduzida por Ruelle) se existe alguma função continua, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, cuja media temporal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad \text{não existe.}$$

Que a media temporal não exista quer dizer que as somas parciais $\widetilde{\varphi}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$ alternam de valor de forma considerável. Os diferentes valores $\widetilde{\varphi}_n(x)$ certamente guardam informação da órbita de tamanho n. Outra forma de introducir o comportamento histórico é por meio de medidas invariantes. Para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ podemos definir a medida,

$$\mu_{x,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}$$

onde δ_y denota a medida de Dirac concentrada em y. Agora, sabemos que as medidas de probabilidade boreliana estão em correspondência $1-1$ com funcionais lineares contínuos sobre $C^0(X)$, o espaço de funções continuas sobre X. Mais precisamente a correspondência,

$$\mu_{x,n} \mapsto F_{x,n}\colon C^0(X) \to \mathbb{R},$$

está definido por

$$F_{x,n}(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu_{x,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)).$$

Por tanto, nesta terminologia, decir que a $\mathscr{O}(x)$ têm comportamento histórico significa que a sequência de medidas $(\mu_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$ não converge na topología fraca. No entanto, lembre que, sendo X compacto sempre existirão pontos límites da sequência $(\mu_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Sabemos também que tais pontos límites são medidas invariantes por f.

Recordemos que o Teorema ergódico individual de Birkhoff nos diz que o conjunto de pontos, cujas órbitas têm comportamento histórico, têm $\mu-$medida nula para qualquer probabilidade boreliana μ invariante por f. Mesmo que isto oconteça , nosso interesse em estudar os pontos com comportamento histórico reside no último problema de Takens [3]. Mire também em Ledrappier [1], [2].

¿Há classes robustas de sistemas dinâmicos diferenciáveis de tal maneira que o conjunto de estados iniciais que dão lugar a órbitas com comportamento histórico tenha medida de Lebesgue positiva?

I.2 Dimensão de Hausdorff

Um conceito importante em sistemas dinámicos é a chamada *dimensão de Hausdorff* (ou dimensão fractal). É uma medida de rugosidad/caos. Veremos que ad dimensão de Hausdorff de um ponto é 0, de um segmento de reta é 1, de um quadrado é 2 e de um cubo é 3 e assim por diante, curvas suaves possuem dimensão de Hausdorff igual à sua dimensão topológica usual. A dimensão de Hausdorff é uma generalização métrica da dimensão topológica, esta permite definir uma dimenssão fraccionaria (não entera) para um objeto fractal.

Definição I.1 ($s-$medida exterior) *Seja (M, d) um espaço métrico e seja $X \subset M$ um conjunto não vazio. Dado $s > 0$, define-se a medida exterior, de ordem s, de X por,*

$$H^s_\varepsilon(X) := \inf_{\mathcal{U}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos as coberturas abertas $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X com diámetro no máximo $\varepsilon > 0$, isto é $0 < |U_i| \leq \varepsilon$.

Recuerde que o diámetro de um conjunto $|U|$, é a maior das distâncias entre pares de pontos do conjunto. Note que as coberturas X tem precisão ε e que a função $\varepsilon \to H^s_\varepsilon(X)$ é decrescente, isto é, se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ então $H^s_{\varepsilon_1}(X) \geq H^s_{\varepsilon_2}(X)$, isto é devido ao fato de que toda cobertura aberta de diámetro no máximo ε_1 é uma cobertura de diámetro no máximo ε_2.

Definição I.2 (**$s-$medida de Hausdorff**) *A medida de Hausdorff de ordem s pode ser obitda tomando coberturas mais precisas e isto podemos conseguir no limite. Este número é dado por $H^s(X) := \lim_{\varepsilon\to 0} H^s_\varepsilon(X)$.*

O seguiente resultado nos permitirá definir a dimensão de Hausdorff de um conjunto X qualquer. A ideia básica é que todo conjunto X em um espaço de dimensão s terá medida cero em qualquer espaço de dimensão $t > s$. Este mesmo conjunto pode ter medida infinita se baixamos a dimensão. Por exemplo, $[0,1]$ tem medida cero em $\mathbb{R}^2$ enquanto o quadrado unitário $[0,1]^2$ tem medida infinita em $\mathbb{R}$.

Teorema I.1 *Seja X um subconjunto de M. Resulta que:*

(a) Se $H^{s_0}(X) < \infty$ então $H^s(X) = 0$ para todo $s > s_0$.

(b) Se $H^{s_0}(X) > 0$ então $H^s(X) = \infty$ para todo $s < s_0$.

Seja $s_0 \geq 0$ tal que $H^{s_0}(X) < \infty$ e seja $s > s_0$. Observe que qualquer cobertura $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X de diámetro no máximo $\varepsilon > 0$ satisfaz o seguiente,

$$H^s_\varepsilon(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^{s-s_0}|U_k|^{s_0} \leq \varepsilon^{s-s_0}\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^{s_0}.$$

Portanto, tomando o inf sobre as coberturas de X a ambos lados da desigualdade, tem-se que $H^s_\varepsilon(X) \leq \varepsilon^{s-s_0} H^{s_0}_\varepsilon(X)$. Portanto, como $H^{s_0}_\varepsilon(X) \leq H^{s_0}(X) < \infty$, se fizermos $\varepsilon \to 0$ tem-se $H^s(X) = 0$.

Suponha agora que $s_0 > 0$ com $H^{s_0}(X) > 0$ e seja $s < s_0$. Neste caso, qualquer cobertura $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X de diámetro no máximo $\varepsilon > 0$ satisfaz o seguinte,

$$H^s_\varepsilon(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^{s-s_0}|U_k|^{s_0} \geq \frac{1}{\varepsilon^{s_0-s}}\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^{s_0} \geq \frac{1}{\varepsilon^{s_0-s}} H^{s_0}_\varepsilon(X).$$

E o resultado obtem-se fazendo $\varepsilon \to \infty$.

Definição I.3 *O teorema anterior permite definir a dimensãon de Hausdorff de X,*

$$\dim_H(X) := \inf_{s>0}\{s \mid H^s(X) = 0\} = \sup_{s>0}\{s \mid H^s(X) = \infty\}$$

II Conjuntos Irregulares

II.1 Conjunto irregular das medias de Birkhoff

Seja X um espaço métrico compacto e $f\colon X \to X$ uma função continua. Para cada função continua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ definimos o *conjunto irregular das medias de Birkhoff* de φ por

$$\mathscr{B}(\varphi) = \left\{ x \in X \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \ \ \text{não existe} \right\}. \tag{1}$$

Este conjunto é $f-$invariante, $f(\mathscr{B}(\varphi)) \subset \mathscr{B}(\varphi)$, pois φ resulta ser limitada também,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(f^k(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \frac{1}{n} \left(\varphi(x) - \varphi(f^n(x))\right).$$

O Teorema Ergódico de Birkhoff diz que para qualquer probabilidade μ invariante por f tem-se que $\mu(\mathscr{B}(\varphi)) = 0$. Assim, embora desde o ponto de vista da Teoría Ergódica os conjuntos irregulares $\mathscr{B}(\varphi)$ resultem ser não interessantes por ter medida nula, veremos em várias situações que estos conjuntos carregam toda a entropia e inclussive têm dimensão de Hausdorff total.

Comencemos com a definição de cohomologia para aplicaçõe concentrandonos no subshift de tipo finito $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$. Um *cobordo* é uma aplicação da forma $u \circ \sigma - u$ onde $u\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ é uma função continua. Duas funções $\varphi_1, \varphi_2\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ são chamadas *cohomologas* se a diferença $\varphi_1 - \varphi_2$ é um cobordo. Si φ_1 e φ_2 são cohomologas resulta que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_1(\sigma^k(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi_2(\sigma^k(x)) + u \circ \sigma^{k+1}(x) - u \circ \sigma^k(x)\right)$$

e, dado que u é limitada, tem-se que $\mathscr{B}(\varphi_1) = \mathscr{B}(\varphi_2)$. Em particular, se φ é cohomóloga a 0 então as medias de Birkhoff sempre convergem e por tanto $\mathscr{B}(\varphi) = \emptyset$. Um dos primeiros resultados nesta direção é o Teorema a seguir.

Teorema II.1 *Seja $\sigma\colon \Sigma_A \to \Sigma_A$ o shift de tipo finito associado à matriz de transição A de ordem $d \times d$ e seja $\varphi\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ uma função Hölder continua. Então,*

$$(\varphi, 0) \quad \textit{são não-cohomólogas se, e somente se,} \quad h_{\text{top}}(\sigma) = h_{\text{top}}(\sigma|\mathscr{B}(\varphi)).$$

O resultado é mais geral, de fato, se as funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são não-cohomólogas a $\varphi = 0$ e $\mathscr{B} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{B}(\varphi_j)$ então $h_{\text{top}}(\sigma) = h_{\text{top}}(\sigma|\mathscr{B})$

Resulta que este conjunto possui medida de Hausdorff total.

III Problema

O objetivo do nosso trabalho é dar continuidade ao estudo de dinâmicas com duas ricas propriedades: conjuntos com comportamiento histórico que possuem entropia total e dimensão de Hausdorff total. Resultados parciais foram obtidos em [4].

Referências

[1] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphism Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Annals of Matehematcis, 122 (1985), 509–539.

[2] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphism Part II: Relation between entropy, exponents and dimension*, Annals of Matehematcis, 122 (1985), 540–574.

[3] F Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*

[4] Pablo G. Barrientos, Yushi Nakano, Artem Raibekas, Mario Roldan, *Topological entropy and Hausdorff dimension of irregular sets for non-hyperbolic dynamical systems.* (arxiv.org/abs/2103.11262)

PROCESSO Nº 202106386

Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 30/04/2021

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Mario Rodolfo Roldan Daquilema
Data: 01/08/2021 21:18:56-0300
CPF: 060.425.697-32
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Proponente

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 27/07/2021 18:14:45-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC