UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

S U M Á R I O

Requerente(s): **Prof. Ivan Pontual Costa e Silva**
Título do Projeto: **Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana**
Assunto: **Projeto de Pesquisa.**

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107082

1. Título:

Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana

2. Resumo:

Objetivos.
1) Uma pergunta natural é
se e como a topologia do infi nito-luz relaciona-se à do espaço-tempo.
Dizemos que um espaço-tempo (M, g) com infi nito conforme Jconf possui
a propriedade de censura topológica (PCT) se qualquer curva causal
com extremos em Jconf é homotópica com
extremos fi xos a uma curva em Jconf . O problema de dar condições
sufi cientes para que isso ocorra tem sido investigado em uma série de
trabalhos na literatura. Alguns desses resultados também
resultam em restrições sobre a topologia do horizonte eventos de buracos
negros ao nível do grupo fundamental. Proponho-me a investigar
as perguntas análogas para o infi nito-luz causal Jcaus, onde
essas questões são muito naturais, mas inteiramente em aberto.
2) Outros invariantes topológicos. A censura topológica, mesmo para
bordos conformes, é normalmente discutida em termos de curvas, e
portanto dá apenas informação sobre a relação entre os grupos fundamentais
de (M; g) and J . Mas para espaços-tempos de dimensão maior
que 4 isto é insufi ciente para descrever as possíveis topologias do horizonte
de eventos de buracos negros. Conjecturamos que ao menos para
espaços-tempos com domínios de comunicação exterior globalmente
hiperbólicos possuindo hipersuperfície de Cauchy , o infi nito-luz futuro
e de fato sempre homeomorfo a . Isso põe restrições bastante
mais gerais sobre a topologia de horizontes.
3) Regularidade do bordo causal. Embora os bordos causais tenham propriedades
causais e topológicas interessantes, não parecem nenhuma
estrutura diferenciável natural. Por outro lado, resultados clássico em
análise de dados iniciais para as equações de
campo da Relatividade Geral parecem sugerir que um in nito conforme
regular deveria se formar no contexto globalmente hiperbólico
Uma vez que bordos conformes e causais coincidem em certas situações
, seria altamente instrutivo investigar sob que condições isso se
traduziria em regularidade do infi nito causal.
4) Existência de geodésicas temporais fechadas. É bem conhecido que o
problema de conexidade geodésica tem relação com a existência de
geodésicas fechadas. Recentemente, fomos capazes de generalizar
técnicas para garantir a conexidade geodésica em variedades afi ns. Isto,
por sua vez, nos permite dar condições naturais que garantem a existência de laços geodésicos, isto é, geodésicas que passam ao menos
duas vezes por um mesmo ponto, mas talvez n~ao com a mesma velocidade.
A questão é se podemos melhorar esses resultados para garantir
que tais geodésicas são em verdades geodésicas fechadas, e ademais
garantir que são temporais, usando técnicas correntes na literatura. Resultados parciais indicam que isso pode ser possível.
Em caso a firmativo, isso representaria um resultado bastante importante para
a área.

Palavras-chave:

Geometria de Lorentz; espaços-tempo; Relatividade matemática; teoremas de singularidade; conexidade

geodésica; geodésicas fechadas;

3. Coordenador:

Nome: Ivan Pontual Costa e Silva
Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM
Tipo: Professor
Regime de Trabalho: DE
Valor Mensal: Sem remuneração
Forma de Remuneração: Sem bolsa
Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:
Valor Total: R$ 0,00
Fundações:
Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Inicio: 30/04/2021
Início Efetivo: A partir da data da assinatura.
Duração: 36 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA
Área do Conhecimento: MATEMATICA
Subárea do conhecimento:GEOMETRIA E TOPOLOGIA
Grupo de Pesquisa:

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107082

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Ivan Pontual Costa e Silva 754.450.424-72	Professor Coordenador	30/04/2021 à 29/04/2024	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R$ 0,00 / R$ 0,00		20.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107082

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
30/04/2021 - 17:46h	Ivan Pontual Costa e Silva	Criou o projeto		
30/04/2021 - 17:46h	Ivan Pontual Costa e Silva	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	Olá Cleverson, aqui está meu novo projeto. Se houver qualquer problema, por favor me avise.

Projeto de Pesquisa: ***Rigidez e genericidade de singularidades na geometria Lorentziana***

I.P. Costa e Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

April 21, 2021

Carga horária: 20 horas semanais.

Período: 30/04/2021 a 30/04/2024.

1 Introdução

A noção de *infinito conforme tipo-luz* $\mathscr{J}_{conf}$ de uma espaço-tempo (M, g) foi introduzida por Roger Penrose [5, 6] como uma forma de estudar diversas questões analíticas e geométricas na Relatividade matemática. Entre outras coisas, permite dar uma definição natural e matematicamente precisa de *buraco negro* [7], de importância fundamental na física.

Entretanto, de uma perspectiva puramente geométrica (isto é, sem impor equações de campo), os bordos conformes são apêndices um tanto *ad hoc* em espaços-tempos. Em artigos recentes com colaboradores, introduzimos e exploramos uma versão $\mathscr{J}_{caus}$ de infinito-luz para *bordos causais*, e uma noção concomitante de buracos negros foi definida por nós nesse contexto [1, 2, 3]. Bordos causais, ao contrário dos bordos conformes, são invariantes conformes de espaços-tempos fortemente causais, sendo portanto geometricamente muito mais naturais [21, 22, 23, 24]. Em ambos os casos - conforme e causal - o infinito-luz é uma porção de um bordo convenientemente anexado ao espaço-tempo original, e dessa forma herda uma topologia natural. Além disso, $\overline{M} := M \cup \mathscr{J}_{conf/caus}$ possui uma estrutura causal estendida. Esta é definida em um sentido fraco, pois a métrica, ou mesmo a estrutura diferenciável, não se estendem em geral, o que pode ser tecnicamente bastante desafiador.

Em outra linha de investigação, dois problemas geométricos clássicos [32, 33, 34, 35, 36, 37] são os da *conexidade geodésica*, isto é, quando uma variedade afim ou semi-Riemannianna conexa pode sempre ter dois de seus pontos conectados por uma geodésica, e o de *existência de geodésicas fechadas*.

O teorema de Hopf-Rinow garante que o primeiro problema sempre pode ser respondido afirmativamente em uma variedade Riemanniana completa, mas é muito mais difícil para outros índices. Da mesma forma, condições para a existência de geodésicas fechadas é bastante bem conhecido e estudado no caso Riemanniano, mas há poucos resultados desse tipo em variedades de Lorentz, por exemplo.

2 Propostas de pesquisa

Neste novo projeto, proponho-me a investigar as seguintes questões.

1) *Censura topológica para o infinito-luz causal.* Uma pergunta natural é se e como a topologia do infinito-luz relaciona-se à do espaço-tempo. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) com infinito *conforme* $\mathscr{J}_{conf}$ possui a *propriedade de censura topológica* (PCT) se qualquer curva causal contínua $\alpha : [0, 1] \to M\overline{M}$ com extremos em $\mathscr{J}_{conf}$ é homotópica com extremos fixos a uma curva em $\mathscr{J}_{conf}$. O problema de dar condições suficientes para que isso ocorra tem sido investigado em uma série de trabalhos na literatura [15, 16, 17]. Alguns desses resultados também resultam em restrições sobre a topologia do horizonte eventos de buracos negros ao nível do grupo fundamental [18]. Proponho-me a investigar as perguntas análogas para o infinito-luz *causal* $\mathscr{J}_{caus}$, onde essas questões são muito naturais, mas inteiramente em aberto.

2) *Outros invariantes topológicos.* A censura topológica, mesmo para bordos conformes, é normalmente discutida em termos de *curvas*, e portanto dá apenas informação sobre a relação entre os grupos fundamentais de (M, g) and $\mathscr{J}$. Mas para espaços-tempos de dimensão maior que 4 isto é insuficiente para descrever as possíveis topologias do horizonte de eventos de buracos negros. Conjecturamos que ao menos para espaços-tempos com domínios de comunicação exterior globalmente hiperbólicos possuindo hipersuperfície de Cauchy Σ, o infinito-luz futuro é de fato sempre *homeomorfo* a Σ. Isso põe restrições bastante mais gerais sobre a topologia de horizontes.

3) *Regularidade do bordo causal.* Embora os bordos causais tenham propriedades causais e topológicas interessantes, não parecem nenhuma estrutura diferenciável natural. Por outro lado, resultados clássico em análise de dados iniciais [9, 10, 11, 12, 13, 14] para as equações de campo da Relatividade Geral parecem sugerir que um infinito conforme regular deveria se formar no contexto globalmente hiperbólico. Uma vez que bordos conformes e causais coincidem em certas situações [23], seria altamente instrutivo investigar sob que condições isso se traduziria em regularidade do infinito causal.

4) *Existência de geodésicas temporais fechadas.* É bem conhecido que o problema de conexidade geodésica tem relação com a existência de geodésicas fechadas. Recentemente, fomos capazes [40] de generalizar técnicas em [39] de conexidade geodésica em variadedes afins. Isto, por sua vez, nos permite dar condições naturais que garantem a existência de *laços* geodésicos, isto é, geodésicas que passam ao menos duas vezes por um mesmo ponto, mas talvez não com a mesma velocidade. A questão é se podemos melhorar esses resultados para garantir que tais geodésicas são em verdades geodésicas fechadas, e ademais refinar para garantir que são *temporais*, usando técnicas similares à de [35]. Resultados parciais indicam que isso pode ser possível. Em caso afirmativo, representará um resultado bastante importante para a área.

3 Pesquisadores envolvidos

Embora este projeto frente à UFSC seja de minha inteira responsabilidade, possivelmente é válido ressaltar que esses são trabalhos em colaboração com pesquisadores na Espanha e na Itália, além de meus estudantes de doutorado.

4 Prospectos

Acredito fortemente que soluções ao menos parciais de (1), (3) e (4) são bastante factíveis, uma vez que já possuímos técnicas pertinentes bem-desnvolvidas e aplicadas a problemas próximos com êxito. A situação com (2) é menos clara, mas o aprofundamento das conexões entre bordos causais e conformes representa um avanço técnico importante; sentimos por isso que este será um esforço bem empregado.

References

[1] I.P. Costa e Silva I P, J.L. Flores and J. Herrera, *Hausdorff closed limits and the c-boundary I: a new topology for the c-completion of spacetimes*, *Classical and Quantum Gravity* **36** (2018) 175002.

[2] I.P. Costa e Silva I P, J.L. Flores and J. Herrera, *Hausdorff closed limits and the c-boundary II: null infinity and black holes*, Classical and Quantum Gravity, **36** (2019) 185007.

[3] I. P. Costa e Silva, J. L. Flores, and J. Herrera, *A novel notion of null infinity for c-boundaries and generalized black holes*, *Journal of High Energy Physics*, 2018:123 (2018).

[4] R. Geroch, E. H. Kronheimer and R. Penrose, *Ideal points in space-time*, *Proceedings of the Royal Society A* **327** (1972) 545.

[5] R. Penrose, *Asymptotic properties of fields and space-times*, *Physical Review Letters* **10** (1963) 66.

[6] R. Penrose, *Conformal treatment of infinity*, in *Relativity, Groups and Topology* (C. M. de Witt and B. de Witt, eds.), pp. 566–584. Gordon and Breach, New York, NY, 1964.

[7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 1975.

[8] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[9] J. Frauendiener, *Conformal infinity*, *Living Reviews of Relativity* **7** (2004) .

[10] P. T. Chruściel, *Conformal boundary extensions of Lorentzian manifolds*, *Journal of Differential Geometry* **84** (2010) 19.

[11] H. Friedrich, *On the existence of n-geodesically complete or future complete solutions of einstein's field equations with smooth asymptotic structures*, *Communications in Mathematical Physics* **107** (1986) 587.

[12] H. Friedrich, *On the global existence and the asymptotic behavior of solutions to the Einstein-Maxwell-Yang-Mills equations*, *Journal of Differential Geometry* **34** (1991) 275.

[13] H. Friedrich, *Smoothness at null infinity and the structure of initial data*, in *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields* (P. T. Chruściel and H. Frierdrich, eds.), pp. 243–275. Birkhauser, Basel, 2004. DOI.

[14] P. T. Chruściel and E. Delay, *Existence of non-trivial, vacuum, asymptotically simple spacetimes*, *Classical and Quantum Gravity* **19** (2002) L71.

[15] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, *Topological censorship*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), no. 10, 1486–1489.

[16] G. J. Galloway, *On the topology of the domain of outer communication*, *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995), no. 10, L99–L101.

[17] G. J. Galloway, K. Schleich, D. M. Witt and E. Woolgar, *Topological censorship and higher genus black holes*, *Phys. Rev. D* (3) **60** (1999), no. 10, MR 1757638.

[18] T. Jacobson and S. Venkataramani, *Topology of event horizons and topological censorship*, *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995), no. 4, 1055–1061.

[19] L. B. Szabados, *Causal boundary for strongly causal spacetimes*, *Classical and Quantum Gravity* **5** (1988) 121.

[20] L. B. Szabados, *Causal boundary for strongly causal spacetimes. II*, *Classical and Quantum Gravity* **6** (1989) 77.

[21] D. Marolf and S. F. Ross, *A new recipe for causal completions*, *Classical and Quantum Gravity* **20** (2003) 4085.

[22] J. L. Flores, *The causal boundary of spacetimes revisited*, *Communications in Mathematical Physics* **276** (2007) 611.

[23] J. L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, *On the final definition of the causal boundary and its relation with the conformal boundary*, *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* **15** (2011) 991.

[24] A. García-Parrado and J. M. M. Senovilla, *Causal structures and causal boundaries*, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005) R1.

[25] V. E. Hubeny and M. Rangamani, *No horizons in pp-waves*, *Journal of High Energy Physics* **2002** (2002) 021.

[26] J. Senovilla, *On the existence of horizons in spacetimes with vanishing curvature invariants*, *Journal of High Energy Physics* **2003** (2003) 046.

[27] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, vol. 202 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, New York, 1996.

[28] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103, Volume 103 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic Press, 1983.

[29] J. L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, *Hausdorff separability of the boundaries for spacetimes and sequential spaces*, *Journal of Mathematical Physics* **57** (2016) 022503, 25.

[30] J. L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, *Gromov, Cauchy and causal boundaries for Riemannian, Finslerian and Lorentzian manifolds*, *Memoirs of the American Mathematical Society* **226** (2013) vi+76.

[31] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*. SIAM, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1972.

[32] R. Bartolo, A. Germinario, M. Sánchez *Existence of a Closed Geodesic on Non-compact Riemannian Manifolds with Boundary,* Adv. Nonlinear Stud. **2** (2002), no. 1, 1536-1365.

[33] V. Benci, F. Giannoni, *Closed geodesics on noncompact Riemannian manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 11, 857–861.

[34] V. Benci, F. Giannoni, *On the existence of closed geodesics on noncompact Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **68** (1992), no. 2, 195–215.

[35] J.L. Flores, *Locally extremal geodesic loops on Riemannian manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018) 4029-4033.

[36] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **230**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. x+227 pp. ISBN 3-540-08393-6.

[37] M. Morse, *The calculus of Variations in the Large*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Reprint of the 1932 original.

[38] G. Thorbergsson, *Closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds*, Math. Z. **159** (1978), no. 3, 249–258.

[39] J. K. Beem and P. E. Parker, *Pseudoconvexity and geodesic connectedness.* Ann. Mat. Pura Appl., 155, 137-142 (1989).

[40] I. P. Costa e Silva and J. L. Flores, *Geodesic connectedness of affine manifolds.* Annali di Matematica (2020).

PROCESSO Nº 202107082

Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 20/04/2021

Documento assinado digitalmente
Ivan Pontual Costa e Silva
Data: 28/07/2021 15:53:58-0300
CPF: 754.450.424-72
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Proponente

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 27/07/2021 11:01:24-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC