UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

S U M Á R I O

Requerente(s): **Prof. Cleverson Roberto da Luz**
Título do Projeto: **Propriedades Assintóticas de Modelos de Evolução - Problemas Lineares e Semilineares**
Assunto: **Projeto de Pesquisa.**

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107113

1. Título:

Propriedades Assintóticas de Modelos de Evolução - Problemas Lineares e Semilineares

2. Resumo:

Com este projeto de pesquisa, o proponente pretende dar continuidade ao estudo do comportamento assintótico das soluções de modelos de evolução. Nosso principal objetivo no estudo das equações diferenciais é encontrar taxas de decaimento para a energia, ou seja, mostrar que a energia multiplicada por uma função crescente no tempo decai para zero quando a variável temporal tende a infinito. Nesse projeto estamos interessados em considerar diferentes dissipações para um modelo e analisar o comportamento assintótico em cada caso. Um caso importante e que tem sido estudo por diversos pesquisadores é a dissipação fracionária com coeficiente que depende do tempo. Para modelos semilineares, um problema importante é determinar o expoente crítico e provar a não existência de solução para potências menores do que o expoente crítico.

Palavras-chave:

Expoente crítico; Modelos de evolução dissipativos; Laplaciano fracionário.;

3. Coordenador:

Nome: Cleverson Roberto da Luz
Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM
Tipo: Professor
Regime de Trabalho: DE
Valor Mensal: Sem remuneração
Forma de Remuneração: Sem bolsa
Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:
Valor Total: R$ 0,00
Fundações:
Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Inicio: 01/05/2021
Início Efetivo: A partir da data da assinatura.
Duração: 36 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA
Área do Conhecimento: MATEMATICA
Subárea do conhecimento:ANALISE
Grupo de Pesquisa: Grupo de Equações Diferenciais Parciais

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107113

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Cleverson Roberto da Luz 029.967.469-02	Professor Coordenador	01/05/2021 à 30/04/2024	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R$ 0,00 / R$ 0,00		20.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107113

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
01/05/2021 - 18:14h	Cleverson Roberto da Luz	Criou o projeto		
01/05/2021 - 18:14h	Cleverson Roberto da Luz	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROJETO DE PESQUISA

Propriedades Assintóticas de Modelos de Evolução - Problemas Lineares e Semilineares

Proponente: Cleverson Roberto da Luz

e-mail: cleverson.luz@ufsc.br

Número de Horas Semanais: Vinte horas

Período do Projeto: 01/05/2021 - 01/05/2024

Palavras-chave: Expoente crítico; Modelos de evolução dissipativos; Laplaciano fracionário.

Colaboradores: Dr. Ruy Coimbra Charão, UFSC

Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira, UFSC

Dr. Marcelo Rempel Ebert - USP

Dr. Marcello D'Abbicco, University of Bari

Dr. Ryo Ikehata, Hiroshima University

Introdução e Viabilidade

As Equações Diferenciais Parciais são uma parte muito importante da Matemática e formam uma subárea da Análise. Elas aparecem na modelagem de fenômenos em diversas áreas como Engenharias, Física, Química, Economia, Biologia, Medicina, Meteorologia e muitas outras. Como exemplo, pode-se citar problemas envolvendo propagação de ondas sísmicas e de elasticidade, ressonância magnética, previsão do tempo, aerodinâmica ou mesmo problemas dentro da própria matemática, em áreas como Geometria Diferencial. Aspectos como existência, unicidade, regularidade e comportamento assintótico de soluções para problemas de valor inicial e/ou de contorno são alguns exemplos de resultados teóricos que são amplamente estudados no contexto de equações diferenciais.

Os modelos estudados serão dissipativos, ou seja, a energia total do modelo é uma função real não negativa e decrescente. A dissipação pode ser na fronteira ou interna, isto é, quando ela atua no domínio. Quando a dissipação é interna existe um termo adicional na equação diferencial que faz com a energia associada ao modelo seja decrescente. A dissipação pode atuar em uma parte do domínio ou da fronteira, nesse caso, dizemos que o modelo possui uma dissipação localizada. Por exemplo, uma dissipação interna localizada ocorre quando o termo dissipativo é diferente de zero somente em um subconjunto do domínio.

Em [3, 7, 11, 12, 13, 14] os autores estudaram propriedades da solução da equação da onda com o coeficiente do termo dissipativo, $b = b(t)$, dependendo do tempo. Para obter os resultados os autores assumiram condições apropriadas sobre a função b. Posteriormente em [4], M. D'Abbicco, R. C. Charão e C. R. da Luz obtiveram resultados para a equação de placa com inércia rotacional e uma dissipação fracionária com coeficiente dado por uma função $b = b(t)$. Com esse trabalho, os autores generalizaram os resultados obtidos em [2] e diminuíram as hipóteses sobre $b(t)$ assumidas em trabalhos para a equação da onda [7, 11, 13, 14]. Para obter o resultado foi utilizado o método usado por Marcello D'Abbicco em seus trabalhos para a equação da onda [3, 5, 6, 7, 8] e o método desenvolvido em [1, 2]. Recentemente em [9, 10], os autores estudaram modelos de evolução σ sob o efeito de um termo de amortecimento representado pela ação do operador laplaciano com potência fracionária e coeficiente dependendo do tempo dado por $b(t)(-\Delta)^\theta u_t$. Considerando um t_0 adequado, foi assumido $b(t)$ "confinada" na curva $g(t) := (1+t)^\alpha ln^\gamma(1+t)$ para $t \geq t_0$. Nesse contexto, quando comparadas a resultados anteriores que assumem mais regularidade na função b, os autores obtiveram as mesmas taxas de decaimento para solução quando $\gamma = 0$ e taxas melhores quando $\gamma \neq 0$.

Com este projeto de pesquisa, o proponente pretende dar continuidade ao estudo do comportamento assintótico das soluções de modelos de evolução. Nosso principal objetivo no estudo das equações diferenciais é encontrar taxas de decaimento para a energia, ou seja, mostrar que a energia multiplicada por uma função crescente no tempo decai para zero quando a variável temporal tende a infinito. Nesse projeto estamos interessados em considerar diferentes dissipações para um modelo e analisar o comportamento assintótico em cada caso. Um caso importante e que tem sido estudo por diversos pesquisadores é a dissipação fracionária com coeficiente que depende do tempo. Para modelos semilineares, um problema importante é determinar o expoente crítico e provar a não existência de solução para potências menores do que o expoente crítico.

Devido as diversas aplicações em problemas físicos, é de grande interesse obter novas propriedades assintóticas para modelos de evolução. Além disso, um conhecimento mais completo do assunto renderia não apenas novas técnicas em equações diferenciais, mas também aplicações em muitas áreas do conhecimento.

Descrição dos Modelos e Objetivos

Nesta seção queremos descrever alguns dos modelos que pretendemos estudar neste projeto. Nosso objetivo principal é produzir resultados científicos significativos e relevantes, com vista a publicação em revistas especializadas.

Equação de Segunda Ordem Semilinear

Dentre os problemas que poderão ser estudados, destacamos o problema de provar a existência global de solução e obter propriedades assintóticas para uma equação de evolução abstrata semilinear (sob certas condições de fronteira, quando for o caso):

$$A_1 u_{tt}(t,x) + m(t)A_2 u(t,x) + b(t)A_3 u_t(t,x) = f(u,u_t) \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega. \tag{1}$$

Com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

com Ω podendo ser $\mathbb{R}^n$, um domínio exterior ou um domínio limitado.

No problema acima A_i $(i = 1,2,3)$ são operadores pseudo-diferenciais, autoadjuntos, positivos, com símbolos dados pelas funçoẽs $P_i(\xi)$ $(i = 1,2,3)$.

Assumimos que a função $f(u,u_t)$ é da forma $f(u,u_t) = |u|^p$ ou $f(u,u_t) = |u_t|^p$. Usando taxas ótimas de decaimento para o problema linear correspondente estudamos o expoente crítico p_c da equação (1), isto é, provamos a existência e encontramos taxas de decaimento para $p > p_c$ e provamos a não existência de solução para $p < p_c$. A ideia é resolver o problema para casos particulares da equação (1) e assumindo hipóteses adequadas nas dados iniciais e nos coeficientes que dependem do tempo.

Equação de Placas com Dissipação Fracionária e Memória Não-Linear

Neste trabalho, consideramos o seguinte problema de Cauchy para uma classe de equações de evolução semilinear com amortecimento fracionário e um termo de memória não linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u + (-\Delta)^\theta u_t = F(t,u), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \\ (u, u_t)(0,x) = (u_0, u_1)(x), \end{cases} \tag{3}$$

com $\theta \in [0, \frac{1}{2}), \gamma \in (0,1)$ e $p > 1$, sendo

$$F(t,u) = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u(s,x)|^p \ ds$$

o termo de memória.

O objetivo do trabalho é obter taxas de decaimento do tipo $L^p - L^q$ com $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ para a solução e sua primeira derivada no tempo, bem como taxas de decaimento $(L^1 \cap L^p) - L^p$ para $p < 2$, para em seguida aplicá-las na equação proposta e obter resultados de existência global de solução, a partir de dados iniciais suficientemente pequenos. Durante o estudo, vamos analisar de que modo os parâmetros n, θ e γ, relacionados à dimensão do espaço, à dissipação fracionária e à não linearidade de memória, respectivamente, influenciam o expoente crítico $\bar{p}$, um valor limítrofe para a existência ou não-existência de soluções globais no tempo.

Sistema magneto-termo-elástico

O sistema magneto-termo-elástico em $\mathbb{R}^3$ pode ser descrito pelo seguinte modelo:

$$\begin{array}{l} u_{tt} + \mathcal{L}(u) + \gamma \nabla \theta = \mu_0 \operatorname{curl} h \times H, \qquad \forall \ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ h_t + \nu_1 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = \operatorname{curl}(u_t \times H), \qquad \forall \ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ \theta_t - \kappa \Delta \theta + \gamma \operatorname{div} u_t = 0, \qquad \forall \ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} h = 0, \qquad \forall \ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad \forall \ x \in \mathbb{R}^3 \\ h(0,x) = h_0(x), \qquad \theta(0,x) = \theta_0(x), \qquad \forall \ x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \tag{4}$$

onde $\mathcal{L}(u) = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u$ com λ, μ constantes positivas. No sistema acima $u = (u_1, u_2, u_3)$ denota o vetor deslocamento, $h = (h_1, h_2, h_3)$ o campo magnético e θ é a diferença de temperatura com relação a uma temperatura de referência fixa. As constantes de acoplamento μ_0 (permeabilidade magnética) e γ são positivas e $H = (0,0,1) = \mathbf{e}_3$ indica o campo magnético externo constante. A constante ν_1 é definida por $1/(\sigma\mu_0)$, sendo $\sigma > 0$ a condutividade do material.

A energia total $\mathcal{E}(t)$ associada com a solução do sistema (4) é definida por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t)\|^2 + \mu\|\nabla u(t)\|^2 + (\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u(t)\|^2 + \|h(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2\right\}, \tag{5}$$

para todo $t \geq 0$, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual $L^2(\mathbb{R}^3)$ ou $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\|\nabla u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\|\nabla u^i(t)\|^2$. Então, $\mathcal{E}(t)$ satisfaz a seguinte identidade

$$\mathcal{E}(t) + \nu_1\int_0^t \|\operatorname{curl} h(s)\|^2\, ds + \kappa\int_0^t \|\nabla\theta(s)\|^2\, ds = \mathcal{E}(0), \qquad t \geq 0.$$

Pela identidade da energia temos que $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ é monótona decrescente.

Para obter estimativas para o problema (4), escrevemos o problema correspondente no espaço de Fourier e usamos o método da energia. Aplicando a transformada de Fourier, com relação à variável x, obtemos

$$\hat{u}_{tt} + \mu|\xi|^2\hat{u} + (\lambda+\mu)(\xi\cdot\hat{u})\,\xi + i\gamma\xi\hat{\theta} = \mu_0 i\left(\xi_3\hat{h} - \hat{h}_3\xi\right) \tag{6}$$

$$\hat{h}_t + \nu_1|\xi|^2\hat{h} = i\left(\xi_3\hat{u}_t - \mathbf{e}_3(\xi\cdot\hat{u}_t)\right) \tag{7}$$

$$\hat{\theta}_t + \kappa|\xi|^2\hat{\theta} + i\gamma(\xi\cdot\hat{u}_t) = 0, \tag{8}$$

$$i\,\xi\cdot\hat{h} = 0, \tag{9}$$

com $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$.

Os dados iniciais correspondentes no espaço de Fourier são

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \qquad \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi), \tag{10}$$

$$\hat{h}(0,\xi) = \hat{h}_0(\xi), \qquad \hat{\theta}(0,\xi) = \hat{\theta}_0(\xi) \tag{11}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Publicações do Autor nos Últimos Três Anos

1. M. R. Ebert, C. R. da Luz, M. F. G. Palma. *The influence of data regularity in the critical exponent for a class of semi-linear evolution equations*. Nodea-Nonlinear Differential Equations and Applications, v. 27:44 (2020) 1–21. DOI: 10.1007/s00030-020-00644-w.

2. E. C. Vargas Júnior, C. R. da Luz. *σ-Evolution models with low regular time-dependent non-effective structural damping*. Asymptotic Analysis, v. 119 (2020) 61–86. DOI: 10.3233/ASY-191566.

3. H. P. Oquendo, C. R. da Luz. *Asymptotic behavior for Timoshenko systems with fractional damping*. Asymptotic Analysis, v. 118 (2020) 123–142. DOI: 10.3233/ASY-191552.

4. C. R. da Luz, M. F. G. Palma. *Decay rates for second-order linear evolution problems with fractional laplacian operators*. Ci. e Nat., v. 43, e14 (2021) 1–30. DOI: 10.5902/2179460X41963.

5. E. C. Vargas Junior, C. R. da Luz. *σ-evolution models with low regular time-dependent effective structural damping*. J. Math. Anal. Appl. 499 (2021) 125030. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125030.

Referências Bibliográficas

[1] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space.* J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 247–255.

[2] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping.* J. Hiperbolic Diff. Eqs. **10** (2013), no. 3, 1–13.

[3] M. D'Abbicco, *The threshold of effective damping for semilinear wave equations.* Math. Methods Appl. Sci. **38** (2015), no. 6, 1032–1045.

[4] M. D'Abbicco, R. C. Charão and C. R. da Luz, *Sharp time decay rates on a hyperbolic plate model under effects of an intermediate damping with a time-dependent coefficient.* Discrete and Continuous Dynamical Systems **36** (2016) 2419–2447.

[5] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, *An application of L^p-L^q decay estimates to the semi-linear wave equation with parabolic-like structural damping.* Nonlinear Anal. **99** (2014), 16–34.

[6] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, *Diffusion phenomena for the wave equation with structural damping in the L^p-L^q framework.* J. Differential Equations **256** (2014), no. 7, 2307–2336.

[7] M. D'Abbicco, S. Lucente and M. Reissig, *Semi-linear wave equations with effective damping.* Chin. Ann. Math. Ser. B **34** (2013), no. 3, 345–380.

[8] M. D'Abbicco and M. Reissig, *Semilinear structural damped waves.* Math. Meth. Appl. Sci. **37** (2014), no. 11, 1570–1592.

[9] E. C. Vargas Júnior and C. R. da Luz, *σ-Evolution models with low regular time-dependent non-effective structural damping.* Asymptotic Analysis **119** (2020) 61–86.

[10] E. C. Vargas Júnior, C. R. da Luz, *σ-evolution models with low regular time-dependent effective structural damping.* J. Math. Anal. Appl. **499** (2021) 125030.

[11] M. Kainane, *Structural damped σ-evolution operators*, Ph.D Thesis, 2014, University of Freiberg.

[12] S. Matthes and M. Reissig, *Qualitative properties of structurally damped wave models.* Eurasian Mathematical Journal **4** (2013), no. 3, 84–106.

[13] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. I. Non-effective dissipation.* J. Differential Equations **222** (2006), no. 2, 487–514.

[14] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. II. Effective dissipation.* J. Differential Equations **232** (2007), no. 1, 74–103.

Florianópolis, 29 de abril de 2021.

ICP-Edu

Documento assinado digitalmente

Cleverson Roberto da Luz
Data: 26/07/2021 11:25:31-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Cleverson Roberto da Luz

PROCESSO Nº 202107113

Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 29/04/2021

Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 26/07/2021 11:33:56-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Proponente

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 26/07/2021 11:34:23-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC