UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

S U M Á R I O

Requerente(s): **Profª. Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima**
Título do Projeto: **Caracterização de Sistemas Polinomiais Planares de Grau >=3**
Assunto: **Projeto de Pesquisa.**

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107043

1. Título:

Caracterização de Sistemas Polinomiais Planares de Grau >=3

2. Resumo:

A caracterização completa (via formas normais) dos
campos de vetores polinomiais planares de grau n, com determinada propriedade, é um assunto bastante estudado em teoria qualitativa. Quando fixamos o grau do sistema, é possível investigar a sua forma normal e também o seu retrato de fase. Para $n=2$, por exemplo, é quase impossível trabalhar diretamente com toda a classe de campos vetoriais quadráticos porque estes dependem de doze parâmetros. É possível reduzir o número de parâmetros via ação de grupo na classe quadrática e reescalonamento do tempo, mas ainda assim a completa caracterização é um trabalho em aberto. Por isso restringimos as classes, estudando sistemas com determinadas características. No projeto anterior, estudamos sistemas planares quadráticos com cúbicas invariantes e invariante de Darboux. Deste estudo conseguimos uma classificação em termos de formas normais e apresentamos também todos os possíveis retratos de fase no disco de Poincaré. Para os próximos dois anos temos o objetivo de estender o estudo anterior, investigando sistemas planares polinomiais, mas agora com grau arbitrário n>=3. Além disso, queremos apresentar retratos de fase para alguns valores de n

Palavras-chave:

Curva Algébrica Invariante; Invariante de Darboux; Sistemas Polinomiais; Formas Normais;

3. Coordenador:

Nome: Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima
Departamento: MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM
Tipo: Professor
Regime de Trabalho: DE
Valor Mensal: Sem remuneração
Forma de Remuneração: Sem bolsa
Carga Horária Semanal: 20.00h

4. Entidades Participantes:

Financiadores:
Valor Total: R$ 0,00
Fundações:
Tipo de Instrumento Contratual: Não será celebrado instrumento jurídico com a UFSC.

5. Período:

Previsão de Inicio: 01/05/2021
Início Efetivo: A partir da data da assinatura.
Duração: 36 Meses

6. Área do Projeto:

Grande Área do Conhecimento: CIENCIAS EXATAS E DA TERRA
Área do Conhecimento: MATEMATICA
Subárea do conhecimento:ANALISE
Grupo de Pesquisa:

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107043

7. Comitê de Ética:

Não se aplica;

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107043

8. Equipe do Projeto:

CPF / Nome	Tipo	Período	Depto/Curso	Valor Mensal / Valor Total	Teto Excedid	Carga Hora. Semanal	Paad	Situação
Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima 367.200.528-29	Professor Coordenador	01/05/2021 à 30/04/2024	MTM/CFM - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA / MTM/CFM	R$ 0,00 / R$ 0,00		20.00h	Sim	

Número total de participantes na equipe do projeto: 1

0 externos à UFSC (0,00%)

1 vinculados à UFSC (100,00%)

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SÍNTESE DO PROJETO DE PESQUISA

Situação: Aguardando Aprovação do Coordenador de Pesquisa

Número: 202107043

9. Financiamento:

Não se aplica.

10. Propriedade Intelectual:

Não se aplica.

12. Movimentações:

Data	Responsável	Ação	Notificados	Comentários
30/04/2021 - 12:41h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Criou o projeto		
30/04/2021 - 12:41h	Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima	Enviou o projeto para aprovação	Cleverson Roberto da Luz	

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROJETO DE PESQUISA

Caracterização de Sistemas Polinomiais Planares de Grau ≥ 3

Proponente: Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima

e-mail: c.r.lima@ufsc.br

Número de Horas Semanais: Vinte horas

Período do Projeto: 01/05/2021 - 30/04/2024

Palavras-chave: Curva Algébrica Invariante; Invariante de Darboux; Sistemas Polinomiais; Formas Normais;

Colaboradores: Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira, USP
Dr. Jaume Llibre Saló, Universidade Autônoma de Barcelona (UAB)
Dr. Douglas Duarte Novaes, UNICAMP

Introdução e Viabilidade

A caracterização completa (via formas normais) dos campos de vetores polinomiais planares de grau n, com determinada propriedade, é um assunto bastante estudado em teoria qualitativa. Quando fixamos o grau do sistema, é possível investigar a sua forma normal e também o seu retrato de fase. Para $n = 2$, por exemplo, é quase impossível trabalhar diretamente com toda a classe de campos vetoriais quadráticos porque estes dependem de doze parâmetros. É possível reduzir o número de parâmetros via ação de grupo na classe quadrática e reescalonamento do tempo, mas ainda assim a completa caracterização é um trabalho em aberto. Por isso restringimos as classes, estudando sistemas com determinadas características. No projeto anterior, estudamos sistemas planares quadráticos com cúbicas invariantes e invariante de Darboux. Deste estudo conseguimos uma classificação em termos de formas normais e apresentamos também todos os possíveis retratos de fase no disco de Poincaré. Para os próximos dois anos **temos o objetivo de estender o estudo anterior, investigando sistemas planares polinomiais, mas agora com grau arbitrário $n \geq 3$. Além disso, queremos apresentar retratos de fase para alguns valores de n.**

Capítulo 1

Descrição dos Problemas e Objetivos

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados desta linha de pesquisa, além dos problemas que pretendemos resolver. Espera-se, ao final de dois anos, que os problemas estudados gerem resultados científicos significativos e relevantes, que possam ser publicados em revistas da área.

1.1 Linhas gerais sobre sistemas suaves

Comecemos com a definição de campo vetorial

Definição 1.1.1. *Um campo vetorial de classe C^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ou $k = \infty$, é uma aplicação $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é aberto.*

Ao campo vetorial X está associado a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{1.1}$$

ou simplesmente EDO. A notação $\dot{x}$ denota a derivada da função x com relação á variável t, que é chamada *variável independente.* Se F é uma função que não depende de t, o sistema (1.1) é chamado de *autônomo*.

O Teorema de Existência e Unicidade garante que se F é uma função contínua e localmente Lipschitz com relação a variável x então o sistema (1.1) possui uma única solução se fixarmos a condição inicial de que $x(t_0) = x_0$, para algum $(t_0, x_0) \in U$. Entretanto entre o sistema possuir uma solução e nós conseguirmos encontrá-la precisamente, existe uma grande dificuldade. De fato, J. Liouville (1809-1882) provou que nem toda EDO admite uma solução que pode ser expressa usando funções elementares ($\sin x$, $\cos x$, $e^x, \ldots$). Sendo assim, H. Poincaré e A. Lyapunov deram início ao que chamamos de *teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias*, que consiste em estudar o comportamento do sistema (1.1) sem conhecer, de fato, a expressão da solução. Na investigação do comportamento das soluções de uma EDO, o interesse é grande na detecção e entendimento de certas complexidades, como órbitas periódicas e curvas invariantes, as quais definiremos mais adiante.

As aplicações diferenciáveis $x : I \to U$ onde I é um intervalo da reta, tais que

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{para todo } t \in I,$$

são soluções da equação (1.1) chamadas *trajetórias*.

Se impomos que a solução $x : I \to U$ valha x_0 num determinado instante $t_0 \in I$, então obtemos o *problema de valor inicial* (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição 1.1.2. *Seja $x : I_{x_0} \to U$ uma solução maximal (regular ou constante) do PVI* (1.2)*. A imagem da curva $\gamma_\varphi = \{x(t);\ t \in I_{x_0}\} \subset U$ munida da orientação induzida por x é chamada de órbita de F associada à solução maximal x.*

Definição 1.1.3. *O retrato de fase de um campo de vetores $F : U \to \mathbb{R}^2$ é o conjunto das órbitas orientadas de F. Ele consiste de singularidades e órbitas regulares, orientadas de acordo com as soluções maximais que as descrevem.*

1.1.1 O problema de classificação de sistemas em $\mathbb{R}^2$

Se (1.1) for um sistema planar e autônomo, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y), \\ \dot{y} &= Q(x,y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quando P e Q são polinômios nas variáveis x e y dizemos que o sistema (1.3) é um *sistema polinomial planar* e definimos $n = \max\{\deg P, \deg Q\}$ como sendo o *grau* do sistema.

Os sistemas polinomiais planares aparecem em muitos ramos da física e da matemática aplicada, assim como em outras ciências aplicadas. Quando o sistema apresenta curvas invariantes e integrais primeiras, seu retrato de fase pode ficar completamente determinado usando tais objetos. Se além de curvas invariantes o sistema também apresenta um invariante de Darboux, este nos dá informação sobre os conjuntos α e ω-limites do sistema, o que contribui para o retrato de fase no disco de Poincaré, como veremos a seguir.

Definição 1.1.4. *Dada $f \in \mathbb{R}[x,y]$, dizemos que a curva de nível $f(x,y) = 0$ é uma curva algébrica invariante do sistema* (1.3) *se existir uma função $K \in \mathbb{R}[x,y]$ tal que a seguinte igualdade se verifique*

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Observação 1.1.5. *Note que se f é curva algébrica invariante e (x_0, y_0) é um ponto tal que $f(x_0,y_0) = 0$ então $P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, isto é, se $F = (P,Q)$ temos $\langle F, \nabla f\rangle(x_0,y_0) = 0$ e portanto, $F(x_0,y_0) \perp \nabla f(x_0,y_0)$. Logo, em cada ponto da curva o campo é paralelo ao vetor tangente de f e se uma órbita intercepta a curva f=0, então ela está inteiramente contida na curva. Isso justifica o termo "invariante".*

Da observação acima segue que se o sistema possui uma curva invariante, então as órbitas passando por pontos que pertencem a curva se mantém nela, ou seja, pontos que estão sobre a curva possuem sua órbita completamente determinada.

Um *invariante* para o sistema (1.3) em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ é uma função analítica não constante I nas variáveis x, y e t tal que $I(x(t), y(t), t)$ é constante sobre toda curva solução $(x(t), y(t))$ do sistema (1.3) em U, i.e.

$$\frac{\partial I}{\partial x}P + \frac{\partial I}{\partial y}Q + \frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

para todo $(x, y) \in U$.

Definição 1.1.6. *Um invariante I é chamado invariante de Darboux se ele pode ser escrito como*

$$I(x, y, t) = e^{s\,t} f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p},$$

onde $f_i = 0$ são curvas algébricas invariantes do sistema (1.3) *para $i = 1, \ldots p$ e $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Seja $\phi_p(t)$ a solução do sistema (1.3) passando pelo ponto $p \in \mathbb{R}^2$, definida em seu intervalo maximal (α_p, ω_p) tal que $\phi_p(0) = p$. Se $\omega_p = \infty$ definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \exists\{t_n\} \text{ com } t_n \to \infty \text{ e } \phi_p(t_n) \to q \text{ quando } n \to \infty\}.$$

Analogamente, se $\alpha_p = -\infty$ definimos

$$\alpha(p) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \exists\{t_n\} \text{ com } t_n \to -\infty \text{ e } \phi_p(t_n) \to q \text{ quando } n \to \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados ω–limite e α–limite de p, respectivamente.

Se um determinado sistema possui invariante de Darboux, obtemos informações sobre os conjuntos ω– e α–limite de todas as órbitas do sistema (1.3), o que contribui para desenhar o retrato de fase no disco de Poincaré. Mais especificamente, temos o seguinte resultado

Proposição 1.1.7. *Seja $I(x, y, t) = f(x, y)e^{st}$ um invariante de Darboux do sistema* (1.3)*. Seja $p \in \mathbb{R}^2$ e $\phi_p(t)$ a solução dos sistema* (1.3)*com intervalo maximal (α_p, ω_p) tal que $\phi_p(0) = p$. Assuma $s > 0$. Então se $\omega_p = \infty$ temos que $\omega(p)$ está contida no fecho de $\{f(x, y) = 0\}$ dentro do disco de Poincaré, e se $\alpha_p = -\infty$ temos que $\alpha(p)$ está contida em $\mathbb{S}^1$, i.e. no infinito. Quando $s < 0$ devemos inverter os papéis de $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ com respeito a $s > 0$.*

Muitos trabalhos já foram feitos sobre esse tema, como em [9, 10, 11]. Em tais trabalhos foram estudadas formas normais e retratos de fase que os sistemas diferenciais planares quadráticos com cônicas invariantes podem apresentar. O estudo apresentado em [11] é uma parte dos resultados obtidos no projeto anterior: Seja $\mathcal{X}_2^3(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os sistemas reais planares polinomiais de grau 2 tendo uma cúbica invariante. Foram exibidas formas normais para sistemas em $\mathcal{X}_2^3(\mathbb{R})$ e desenhados todos os possíveis retratos de fase no disco de Poincaré para sistemas em $\mathcal{X}_2^3(\mathbb{R})$ que possuíam um invariante de Darboux gerado por esta cúbica. Os próximos teoremas resumem a investigação

Teorema 1.1.8. *Existem 24 formas normais para sistemas em $\mathcal{X}_2^3(\mathbb{R})$ que possuem uma cúbica invariante.*

Teorema 1.1.9. *Existem 112 distintos e realizáveis retratos de fase para sistemas em $\mathcal{X}_2^3(\mathbb{R})$ que possuem um invariante de Darboux definido pela cúbica invariante.*

Seguindo tais ideias o objetivo deste projeto é **concluir resultados análogos, agora para sistemas em $\mathcal{X}_n^3(\mathbb{R}), n \geq 3$. Aqui, $\mathcal{X}_n^3(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todos os sistemas reais planares polinomiais de grau $n \geq 3$.**

Vale ressaltar a dificuldade em estudar formas normais para sistemas de grau arbitrário com cúbicas invariantes. Tanto pela falta de resultados anteriores como pelo grande número de parâmetros que tais sistemas apresentam.

Além disso, em vias de exemplificar a teoria, **pretendemos desenhar alguns retratos de fase no disco de Poincaré, para alguns valores de n.**

Capítulo 2

Colaboradores

Visando cumprir os objetivos listados acima, descrevemos aqui os colaboradores acadêmicos atuais da docente, que podem contribuir para o fortalecimento da pesquisa na Universidade Federal de Santa Catarina. Também há interesse em ampliar o número de colaboradores sempre que possível, afim de obter maior conhecimento na área.

- Profª Doutora Regilene Delazari dos Santos Oliveira, docente e pesquisadora do departamento de matemática da Universidade de São Paulo (USP), campus São Carlos-SP.
- Profº Doutor Douglas Duarte Novaes, professor e pesquisador do departamento de matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), campus de Campinas-SP.
- Profº Catedrático Jaume Llibre Saló, professor e pesquisador do departamento de matemática da Universidade Autônoma de Barcelona (UAB), em Bellaterra, Espanha.

Referências Bibliográficas

[1] J.C. ARTÉS, PhD thesis, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1990. Advisor J. Llibre.

[2] R. BIX, *Conics and Cubics. A concrete introduction of algebraic curves.* UTM, Springer, 2006.

[3] C. J. CHRISTOPHER, J. LLIBRE, C. PANTAZI, X. ZHANG., *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems.* J. Phys. A: Math Gen. **35** (2012) , 2457–2476.

[4] C. J. CHRISTOPHER AND J. LLIBRE, *Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems,* Ann. Differ. Equ. **16** (2000), 5–19.

[5] W.A. COPPEL, *A survey of quadratic systems*, J. Differential Equations, **2** (1966), 293–304.

[6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J. C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer, New York, 2006.

[7] J. LLIBRE, M. MESSIAS AND A. C. REINOL, *Normal forms and global phase portraits of quadratic and cubic integrable vector fields having two nonconcentric circles as invariant algebraic curves.*, Dyn. Syst. **32** (2017), 374–390.

[8] J. LLIBRE, M. MESSIAS AND A. C. REINOL, *Darboux invariants for planar polynomial differential systems having an invariant conic.* Z. Angew. Math. Phys. **65** (2014), 1127–1136.

[9] J. LLIBRE AND R. D. S. OLIVEIRA, *Quadratic systems with invariant straight lines of total multiplicity two having Darboux invariants*, Commun. Contemp. Math. **17** (2015), 17 pp.

[10] J. LLIBRE AND R. D. S. OLIVEIRA, *Quadratic systems with invariant conics having Darboux invariants*, To appear in Commun. Contemp. Math. **4** (2018), 15 pp.

[11] J. LLIBRE, R. D. S. OLIVEIRA AND C. A. B. RODRIGUES, *Quadratic systems with an invariant algebraic curve of degree* 3 *and a Darboux invariant*, preprint.

Florianópolis, 29 de abril de 2021.

Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima

PROCESSO Nº 202107043

Encaminhe-se à Câmara de Pesquisa, para manifestação.
Em, 29/04/2021

Documento assinado digitalmente
Camila Aparecida Benedito Rodrigues de Lima
Data: 27/07/2021 12:59:19-0300
CPF: 367.200.528-29
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Proponente

Aprovado na reunião da Câmara de Pesquisa do dia 30 de abril de 2021 (ata 250).

Documento assinado digitalmente
Cleverson Roberto da Luz
Data: 26/07/2021 11:09:16-0300
CPF: 029.967.469-02
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Assinatura Coordenador de Pesquisa
Departamento de Matemática – UFSC